Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LVI. esztendő

2017-2018. tanév

12. évfolyam

I. forduló

1. Határozzuk meg az $f:\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R},\ f(x)=x^5+\frac{a}{x}$ függvény minimumát, ha $a>0$ valós paraméter.

2. Számítsuk ki a p valós paraméter értékét, ha tudjuk, hogy az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\cos 2x-2p\cdot(1+\cos x)$ függvény abszolút minimuma $-\frac{1}{2}$.

3. Az ABC háromszögben az oldalak hossza a szokásos jelöléssel a, b, c. Tudjuk, hogy $b^2=ac$, és a b hosszúságú oldallal szemben levő szög nagysága x (radián). Határozzuk meg az f függvény lehetséges legbővebb értelmezési tartományát és értékkészletét, ha

$$f(x)=\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}.$$

4. Az $ABCDE$ konvex ötszög rendelkezik a következő tulajdonsággal:

$T_{ABC}=T_{BCD}=T_{CDE}=T_{DEA}=T_{EAB}=1$ (T_{XYZ} az XYZ háromszög területe).

Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok ilyen (nem egybevágó) ötszög létezik, viszont mindegyiknek ugyanakkora a területe.

5. a_1, a_2, a_3 ebben a sorrendben egy számtani, b_1, b_2, b_3 ebben a sorrendben egy mértani sorozat egymást követő tagjai, amelyekre $a_1+a_2+a_3=15$, $b_1\cdot b_2\cdot b_3=27$. Tudjuk még, hogy $a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3$ pozitív egész számok, és ebben a sorrendben egy mértani sorozat egymást követő tagjai. Határozzuk meg a_3 maximumát.

6. A H halmazra $|H|=n$ ($n\in\mathbf{N}^+$). $A_1, A_2, \ldots, A_k$ a H részhalmazai úgy, hogy $A_i\cap A_j=\varnothing$ ($i, j\in\{1;2;\ldots;k\}$ és $i\neq j$). Határozzuk meg k maximumát.