Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LVIII. esztendő

2019-2020. tanév

12. évfolyam

I. forduló

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet.

$$13^{\log_{11}\left(x^2-10x+23\right)}=7^{\log_{11}13}$$

2. Az ABC háromszögben $AB=AC$. A B csúcsból induló belső szögfelező a D pontban metszi az AC oldalt, és $BC=BD+AD$. Mekkora a háromszög A csúcsnál levő belső szöge?

3. Igazoljuk, hogy az 1; 10001; 100010001; 1000100010001; … végtelen sorozatban nincs prímszám. (A sorozat tagjai olyan tízes számrendszerben felírt pozitív egész számok, amelyek csak 0 és 1 számjegyeket tartalmaznak, első és utolsó jegyük 1-es és bármely két szomszédos 1-es között három darab 0 van.)

4. Az $\{a_n\}$ sorozatot a következőképpen definiáljuk: $a_1=0$, $a_{n+1}=a_n+1+2\sqrt{a_n+1}$ ($n\geq 1$). Számítsuk ki az a_{2020} értékét.

5. Az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög befogójának hossza 1. P az AB átfogó tetszőleges pontja. P-ből a befogókra állított merőlegesek talppontjai a BC és CA befogókon rendre R és Q. A PR és PQ szakaszok két egyenlő szárú derékszögű háromszögre és egy téglalapra bontják az eredeti háromszöget. Bizonyítsuk be, hogy P helyzetétől függetlenül eme három alakzat közül a legnagyobb területűnek a területe legalább $\frac{2}{9}$.

6. A sík egy véges ponthalmaza *stabil*, ha bármely két pontjának távolsága meghatározott. Legyen $n\geq 4$, és H_n egy olyan síkbeli ponthalmaz, amelyben semelyik három pont nem illeszkedik egy egyenesre. Mutassuk meg, hogy ha H_n-ben a pontpár távolságok közül $\frac{n(n-3)}{2}+4$ meghatározott, akkor H_n *stabil*.