XXVII. Hajnal Imre Matematika Tesztverseny 2023-2024
III. kategória megoldások

1. Az alábbiak közül melyik szám a legnagyobb?

A) $\frac{3}{4}$ **B)** $\frac{5}{6}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{5}{8}$ **E)** $\frac{5}{12}$

A lehetséges megoldások, közös nevezőre hozva: $\frac{18}{24}, \frac{20}{24}, \frac{12}{24}, \frac{15}{24}, \frac{10}{24}$

Ebből már látható, hogy a legnagyobb szám a B.

B

2. Két szomszédos páratan szám összege 20. Mennyi a szorzatuk?

A) 63 **B) 85** **C) 91** **D) 99** **E) 143**

Legyen a két szám $n-1$ és $n+1$, amiből $(n-1)+(n+1)=2n=20$, így $n=10$,
a két szám pedig 9 és 11.
Ezen számok szorzata 99.

D

3. Annának 1500 ismerőse van a Facebookon. Betti ismerőseinek száma 20 %-kal kevesebb ennél. Hány ismerőse van Bettinek a Facebookon?

A) 1000 **B) 1200** **C) 1240** **D) 1250** **E) 1400**

A keresett szám 1500-nál 20%-kal kisebb, azaz 1500-nak a 80%-a:

$$1500 \cdot (100\% - 20\%) = 1500 \cdot \frac{80}{100} = 1200$$

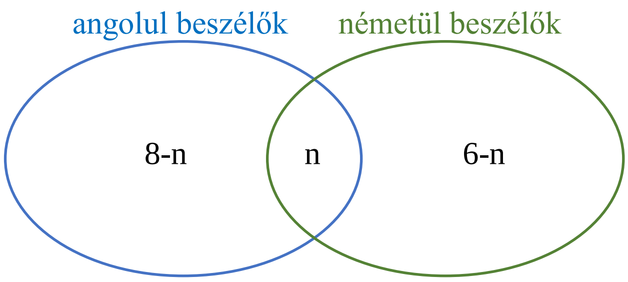
Tehát Bettinek 1200 ismerőse van a Facebookon.

B

4. Egy 10 tagú csoportban mindenki beszéli az angol vagy a német nyelv valamelyikét. Hatan beszélnek közülük németül, nyolcan angolul. Hányan beszélik mindkét nyelvet?

A) 2 **B) 3** **C) 4** **D) 5** **E) 6**

Jelöljük a mindkét nyelven beszélők számát n-nel, így a következő Venn-diagramot lehet felrajzolni:



Így a csak angolul beszélők száma $8-n$, a csak németül beszélők száma $6-n$. Tudjuk, hogy a három kifejezés összege (a csoport létszáma) 10, azaz:

$$(8-n)+n+(6-n)=14-n=10$$

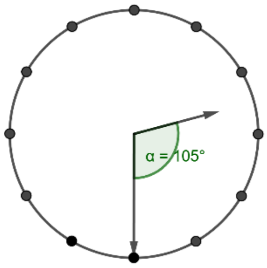
amiből $n=4$, tehát 4 ember beszéli mindkét nyelvet.

C

5. Hány fokos szöget zár be egymással az óra kis- és nagymutatója, ha 14 óra 30 perc van, és az óra a pontos időt mutatja?

A) 30 B) 60 C) 75 D) 105 E) 120

Az óramutató (kismutató) 12 óra alatt tesz egy teljes fordulatot ($360°$), azaz óránként $30°$-ot fordul.
A percmutató (nagymutató) 60 perc alatt tesz egy teljes fordulatot, azaz percenként $6°$-ot.



Az óramutató 12 órakor áll a 12-es számon, ezután 2,5 óra telik el 14 óra 30 percig, ami alatt $2{,}5 \cdot 30° = 75°$-ot fordul.
A percmutató 14 óra 0 perckor áll a 12-es számon, ezután 30 perc telik el 14 óra 30 percig, ami alatt $30 \cdot 6° = 180°$-ot fordul.

A két elfordulási szög különbsége az, ami a két mutató közé esik, ami $108° - 75° = 105°$.

D

6. Három szám úgy aránylik egymáshoz, mint $5 : 9 : 15$. Közülük a középső szám 99. Melyik közülük a legnagyobb?

A) 110 B) 121 C) 132 D) 145 E) 165

A keresett szám 99-nek a $\frac{15}{9}$-ed része, azaz $99 \cdot \frac{15}{9} = 165$.

E

7. Egy termék ára 40 %-os leértékelés után 3600 Ft. Mennyivel kerül most kevesebbe, mint a leértékelés előtt?

A) 2000 Ft B) 2100 Ft C) 2400 Ft D) 1800 Ft E) 2700 Ft

Legyen a termék eredeti ára x Ft. Tudjuk, hogy $x \cdot \frac{60}{100} = 3600$, amiből $x = 6000$, tehát a termék eredetileg 6000 Ft-ba került.
A jelenlegi 3600 Ft-os ár 2400 Ft-tal kevesebb az eredetinél.

C

8. Van egy edényünk, amelynek térfogata tíz literrel több, mint egytized hektoliter? Összesen hány deciliter tej fér az edénybe?

A) 20 B) 100 C) 110 D) 200 E) 1100

Egy hektoliter az 100 liter, azaz egytized hektoliter az 10 liter. Az edényünk ennél 10 literrel nagyobb, azaz 20 liter térfogatú. 20 liter az 200 deciliter.

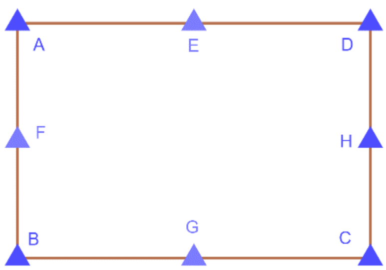
Így 200 dl tej fér összesen az edénybe.

D

9. Egy téglalap alakú sátortábor mentén (határán) legkevesebb hány őrbódét kell felállítani ahhoz, hogy a tábornak mind a négy oldalán pontosan három őrbódé álljon?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

Vegyük észre, hogy ha a téglalap egy csúcsán helyezünk el egy őrbódét, akkor az a téglalap két oldalának is a része. Ha az őrbódék számát szeretnénk minimalizálni, akkor érdemes a téglalap összes csúcsán elhelyezni egyet-egyet, így összesen 4 bódé elhelyezésével mindkét oldalon két bódé fog állni. Ezen kívül még minden oldalon szükséges elhelyezni további egy-egy bódét, ami így összesen 8.



Tehát legkevesebb 8 bódét kell felállítani, hogy a kívánt eredményt elérjük.

A

Több (max. 12) őrbódéval is meg lehet a problémát oldani, de akkor nem kerül minden csúcsba bódé.

10. Peti a barátaival futóversenyt rendezett. Amikor célba ért, megállapította, hogy a versenyzők egynegyede előzte meg, és a versenyzők fele mögötte érkezett célba. Hányadik helyezett lett Peti?

A) 2 **B) 3** **C) 4** **D) 6** **E) 8**

A versenyzők $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$ része Peti előtt vagy mögött végzett, így a versenyzők fennmaradó $\frac{1}{4}$ része maga Peti. Azaz összesen négyen versenyeztek, és Peti a 2. helyen ért célba.

A

11. 1 kg frissen szedett céklából 700 ml ivólé nyerhető. Hány dkg céklára van szükség, ha 3 dl céklalevet szeretnénk kifacsarni?

A) 27 dkg **B) $\frac{300}{7}$ dkg** **C) $\frac{30}{7}$ dkg** **D) $\frac{21}{7}$ dkg** **E) $\frac{210}{7}$ dkg**

Legyen a keresett tömegnek a dekagrammban mért mérőszáma m.

Tudjuk, hogy a 3 dl úgy aránylik a 700 ml-hez, ahogy m aránylik 1 kg-hoz. Végezzünk némi mértékegység-váltást, és ezzel írjuk fel az egyenletet, aránypárt: 1 kg az 100 dkg, valamint 700 ml az 7 dl:

$$\frac{3\text{ dl}}{7\text{ dl}}=\frac{m\text{ dkg}}{100\text{ dkg}}$$

Most az egyenlet mindkét oldalán álló törtben ugyanazokat a mértékegységeket használjuk, így azokkal lehet egyszerűsíteni.

$$\frac{3}{7}=\frac{m}{100}$$

Amiből átrendezéssel kapjuk meg a keresett tömeget, dekagrammban:

$$\frac{300}{7}=m$$

Tehát $\frac{300}{7}$ dkg friss céklából lesz 3 dl céklalé.

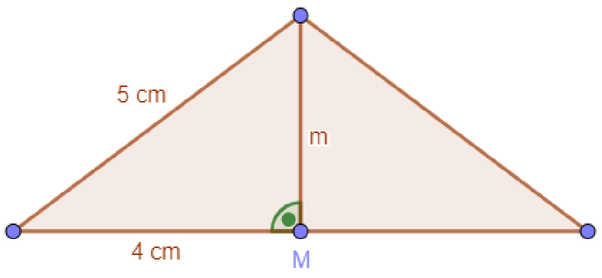
B

12. Egy egyenlőszárú háromszög alapja 8 cm, szárai 5 cm-esek. Mekkora a területe?

A) 8 cm² **B) 10 cm²** **C) 12 cm²** **D) 14 cm²** **E) 24 cm²**

Az ábrán jelöltük a háromszög alaphoz magasságvonalát (m) és a magasság talppontját (M).

Az M pont és bármelyik szár két végpontja egy derékszögű háromszög három csúcsa, ahol ismerjük az átfogót (az eredeti háromszögnek a szára) és az egyik befogót (az eredeti háromszög alapjának a fele).



Így az m magasság négyzetére fel tudjuk írni a Pitagorasz-tételt:

$$m^2=(5\text{ cm})^2-(4\text{ cm})^2=25\text{ cm}^2-16\text{ cm}^2=9\text{ cm}^2$$

Amiből $m=3$ cm adódik.

Mindezen adatokból már ki lehet számolni az eredeti háromszög területét:

$$T=\frac{8\text{ cm}\cdot m}{2}=\frac{8\text{ cm}\cdot 3\text{ cm}}{2}=12\text{ cm}^2$$

C

13. Mennyi annak a téglalap alakú kertnek a területe, amelynek a hossza 90 m, és 240 m hosszú kerítéssel van körbe kerítve?

A) 2000 m² **B) 2400 m²** **C) 2450 m²** **D) 2500 m²** **E) 2700 m²**

Legyen a téglalap két oldala a és b. Tudjuk, hogy $a = 90$ m, és azt is, hogy $K = 2a + 2b = 240$ m.

Ebből $b = \frac{K-2a}{2} = \frac{240\text{ m}-2\cdot 90\text{ m}}{2} = \frac{60\text{ m}}{2} = 30$ m,
így a téglalap területe $t = a \cdot b = 90\text{ m} \cdot 30\text{ m} = 2700\text{ m}^2$

E

14. Egy háromszög oldalainak mérőszámai egymás után következő természetes számok. A háromszög kerülete 42 cm. Hány cm hosszú a háromszög legnagyobb oldala?

A) 13 **B) 15** **C) 14** **D) 21** **E) 42**

Legyen a három oldal centiméterben mért mérőszáma $n-1$, n és $n+1$. Ezen oldalak összege a kerület (centiméterben mérve), azaz:

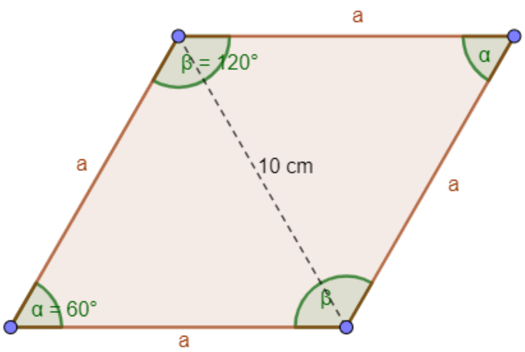
$$(n-1) + n + (n+1) = 42$$

Az összevonást elvégezve $3n = 42$, majd $n = 14$ adódik, tehát a leghosszabb oldal $n + 1 = 15$ cm.

B

15. Egy rombusz egyik belső szöge feleakkora, mint a másik belső szöge. A rövidebb átlója 10 cm. Hány cm a rombusz kerülete?

A) 30 **B) 32** **C) 36** **D) 40** **E) 48**



Tudjuk, hogy a rombusz négy oldala egyenlő, és a szemközti szögei egyenlőek, illetve a szomszédos belső szögekre $\alpha + \beta = 180°$.

Tudjuk még, hogy $\alpha = \frac{\beta}{2}$,
amiből $\alpha + 2\alpha = 180° = 3\alpha$,
amiből $\alpha = 60°$ és $\beta = 120°$.

Ismerjük még a rombusz rövidebb átlóját.

Vegyük észre, hogy az ábrán jelölt (rövidebb) átló a rombuszt két szabályos háromszögre osztja, mivel a rombusz átlói felezik a szögeket ($\frac{\beta}{2} = 60° = \alpha$). Ebből már látni, hogy a rombusz oldalai is 10 cm hosszúak, és annak a kerülete 40 cm.

D

16. Egy számsorozat minden tagja néggyel kisebb, mint a közvetlenül előtte levő. A harmadik tag $\frac{20}{3}$. Mekkora a sorozat első tagja?

A) $\frac{-4}{3}$ **B)** $\frac{8}{3}$ **C)** $\frac{32}{3}$ **D)** $\frac{40}{3}$ **E)** $\frac{44}{3}$

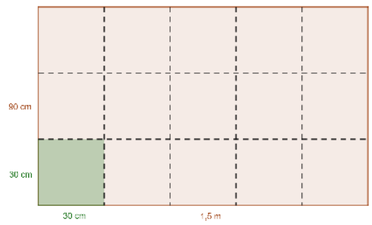
A sorozat harmadik tagja néggyel kisebb a második tagnál, az pedig néggyel kisebb az első tagnál.
Ebből már könnyű felírni a kifejezést a sorozat első tagjára:

$$a_1 = a_3 + 4 + 4 = \frac{20}{3} + 8 = \frac{20}{3} + \frac{24}{3} = \frac{44}{3}$$

E

17. Egy fürdőszoba téglalap alakú padlója $1,5$ m hosszú 90 cm széles. A padlót 30 cm x 30 cm-es négyzet alakú járólappal szeretnénk burkolni. Hány járólapra lesz szükség a hézagmentes, pontos lefedéshez?

A) 30 B) 25 C) 15 D) 12 E) 10



A fürdőszoba rövidebb oldala éppen háromszor, a hosszabb oldala éppen ötször akkora, mint a járólap oldalának a hossza, így $3 \cdot 5 = 15$ járólappal lehet hézagmentesen lefedni a fürdőszobát.

C

18. Melyik az a legkisebb egész szám, melyre teljesül az $x^2 \leq 2023$ egyenlőtlenség?

A) $-\sqrt{2023}$ B) -44 C) -45 D) 0 E) $\sqrt{2023}$

Nézzük meg a „B” lehetőséget: $(-44)^2 = 1936$, tehát erre teljesül az egyenlőtlenség.
Nézzük meg a „C” lehetőséget is: $(-45)^2 = 2025$, tehát erre nem teljesül az egyenlőtlenség.
A „D” lehetőség nagyobb „B”-nél, bár az egyenlőtlenségnek megfelel, az „A” és „E” lehetőségek is megfelelnek az egyenlőtlenségnek, de nem egész számok.

Így a lehetőségek közül a -44 a legkisebb egész, amely megfelel az egyenlőtlenségnek.

B

19. Az alábbiak közül melyik szám a legnagyobb?

A) $(-1)^{2023}$ B) $(-2)^4$ C) $(-2)^5$ D) -2^4 E) 2^{-4}

Vegyük észre, hogy az „A” és „C” kifejezések negatívak, mert egy negatív számnak a páratlan kitevőjű hatványai.

A „D” kifejezés szintén negatív (a negatív előjel nem a hatványalapra vonatkozik).

Az „E” kifejezésre alkalmazva a negatív kitevős hatvány értelmezését: $2^{-4} = \frac{1}{2^4}$, ami 1-nél kisebb.

A „B” kifejezés egy negatív számnak a páros hatványa: $(-2)^4 = 2^4 = 16$, így ez a legnagyobb.

B

20. Ákos és Peti egy írószerboltban vásárolt. Összesen 6000 Ft-ot fizettek, Peti négyszer annyit, mint Ákos. Hány Ft-ot fizetett Peti?

A) 1200 B) 1250 C) 4000 D) 4500 E) 4800

Jelöljük a két fiú által fizetett összeget A-val és P-vel. Tudjuk, hogy $P = 4A$.

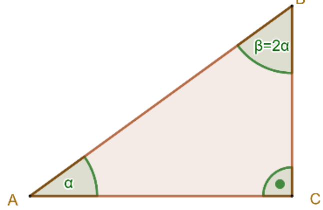
$A + P = A + 4A = 5A = 6000$ Ft, amiből $A = 1200$ Ft és $P = 4800$ Ft.

Tehát Peti 4800 Ft-ot fizetett.

E

21. Egy derékszögű háromszög egyik hegyesszöge $50\,\%$-kal nagyobb, mint a másik hegyesszöge. Mekkora a háromszög legnagyobb hegyesszöge?

A) $90°$ B) $35°$ C) $36°$ D) $40°$ E) $54°$



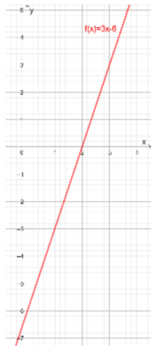
Legyen a két hegyesszög α és β. Tudjuk, hogy $\alpha + \beta = 90°$, és $\beta = 1,5 \cdot \alpha$

$\alpha + \beta = \alpha + 1,5\alpha = 2,5\alpha = 90°$, amiből $\alpha = 36°$ és $\beta = 54°$,
azaz a háromszög legnagyobb hegyesszöge $54°$.
Ne feledjük, hogy a háromszög legnagyobb szöge nem hegyesszög!

E

22. Az $f(x) = 3x + c$ alakú függvény zérushelye 2 (a függvény grafikonja a 2-nél metszi az x-tengelyt). Mekkora a c értéke?

A) -6 **B) 6** **C) 4** **D) 3** **E) 0**



A feladat szerint, ha x helyére 2-t helyettesítünk (zérushely), akkor a kifejezés értéke 0 (zérus):

$$f(2) = 3 \cdot 2 + c = 6 + c = 0$$

Ebből $c = -6$ adódik.

A

23. Melyik állítás nem igaz a téglalapra?

A) szemközti oldalai egyenlőek

B) szögei egyenlőek

C) átlói felezik egymást

D) az átlók mindig felezik a szemközti szögeket

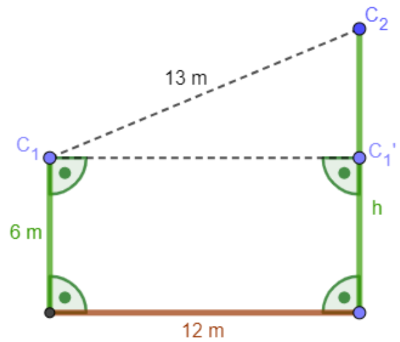
E) az átlók egyenlőek

Az „A”, „B”, „C”, „E” állítások minden téglalapra igazak, azonban a „D” állítás nem. (Azonban van olyan téglalap, amire a „D” állítás is igaz, ez a négyzet.)

D

24. Vízszintes talajon két függőleges fa egymástól 12 m távolságra áll. Csúcsaik távolsága 13 m. Az alacsonyabb fa magassága 6 m. Hány m magas a másik fa?

A) 18 **B) 12** **C) 11** **D) 7** **E) 8**



Az ábrán a zöld vonalak jelölik a két fát, azok csúcsát C_1 és C_2 pontokkal jelöltük, valamit a C_1 pont vetületét C_1'-vel jelöltük a jobb oldali fán.

A $C_1C_1'C_2$ egy derékszögű háromszög, ahol két oldalt ismerünk. Írjük fel a Pitagorasz-tételt a harmadik oldalra:

$$C_1'C_2{}^2 = (13\text{ m})^2 - (12\text{ m})^2 = 169\text{ m}^2 - 144\text{ m}^2 = 25\ m^2$$

Amiből $C_1'C_2 = 5$ m. A fa ennél 6 m-rel magasabb, azaz 11 m magas.

C

25. Két szomszédos négyzetszám különbsége 2023. Melyik számjegyre végződik az összegük?

A) 0 **B) 1** **C) 2** **D) 3** **E) 5**

Két szomszédos négyzetszám két szomszédos egész szám négyzete. Legyen a két szomszédos egész szám n és $n + 1$, ekkor ezek négyzetei a szomszédos négyzetszámok n^2 és $(n + 1)^2$.
A feltétel szerint:

$$(n + 1)^2 - n^2 = (n^2 + 2n + 1) - n^2 = 2n + 1 = 2023$$

amiből $n = 1011$ adódik.

Ezek szerint keresni kell az $1011^2 + 1012^2$ kifejezés utolsó számjegyét.
A négyzetek utolsó számjegyének a meghatározásához elég az alapok utolsó számjegyét négyzetre emelni, azaz az összeg első tagja 1-re, a második tagja 4-re végződik. Mivel összegnél szintén elég az utolsó jegyeket vizsgálni, összeadni, így a kifejezés utolsó számjegye $1 + 4 = 5$.

E

A feladatsort és a megoldásokat összeállították, szerkesztették és lektorálták:

Juhászné Kunstár Mária, **Marczis György**, **Pálinkás István**