

XXVIII. Hajnal Imre Matematika Tesztverseny 2024-2025

III. kategória megoldások

1. Mennyit kapunk eredményül, ha 89-et hozzáadunk a legkisebb kétjegyű természetes számhoz, majd ezt az összeget elosztjuk a legnagyobb egyjegyű számmal?

A) 3 B) 9 **C) 11** D) 12 E) 13

A legkisebb kétjegyű természetes szám a 10; a legnagyobb egyjegyű szám pedig a 9.

$$\text{Így az eredmény: } \frac{89+10}{9} = \frac{99}{9} = 11$$

2. Hány magasságvonala van egy derékszögű háromszögnek?

A) 0 B) 1 C) 2 **D) 3** E) 4

Mint minden háromszögnek, a derékszögű háromszögnek is három magasságvonala van.

Megjegyzés: a befogókhoz tartozó magasságvonalak egyben oldalegyenesek is.

3. Melyik a legnagyobb az alábbi törtek közül?

A) $\frac{5}{16}$ B) $\frac{5}{32}$ C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{5}{8}$ **E) $\frac{3}{4}$**

Azonos számlálójú, pozitív törtek közül az a nagyobb, amelyeknek a nevezője kisebb.

Az A-B-D válaszlehetőségekben a törtek számlálója 5, közülük a legnagyobb a D jelű.

A C-E válaszlehetőségekben a törtek számlálója 3, közülük a legnagyobb az E jelű.

Hozzuk a D és az E törteket közös nevezőre. A legkisebb közös többszörös a 8:

$$D = \frac{5}{8} \text{ és } E = \frac{3}{4} = \frac{6}{8}, \text{ azaz az E tört nagyobb, mint a D tört, és nagyobb az összes többinél is.}$$

4. Ha 6 kg alma 3000 Ft-ba kerül. Hány Ft-ot fizetünk 4 kg almáért?

A) 1200 B) 1250 C) 1500 D) 1650 **E) 2000**

$$\text{Az alma ára egyenesen arányos a tömegével: } \frac{4 \text{ kg}}{6 \text{ kg}} = \frac{x \text{ Ft}}{3000 \text{ Ft}}$$

$$\text{amiből } x = 3000 \cdot \frac{4 \text{ kg}}{6 \text{ kg}} = 2000.$$

5. Egy téglalap egyik oldala 22 cm hosszú, a másik oldalának hossza pedig ennek negyed része. Hány cm a téglalap kerülete?

A) 33 B) 49,5 **C) 55** D) 66 E) 70

Legyen $a = 22$ cm, ekkor a téglalap másik oldalának a hossza $\frac{a}{4}$.

$$\text{A téglalap kerülete: } K = 2 \left(a + \frac{a}{4} \right) = 2,5 \cdot a = 2,5 \cdot 22 \text{ cm} = 55 \text{ cm}$$

6. Egy osztály létszáma 36 fő. Az osztályba harmadannyi fiú jár, mint lány. Mennyivel kevesebb fiú jár az osztályba, mint lány?

A) 9 B) 12 **C) 18** D) 24 E) 27

Legyen a fiúk száma F , a lányok száma pedig L .

Tudjuk, hogy $L + F = 36$, illetve, hogy $L = 3F$.

Helyettesítsük az első egyenletben L helyére $3F$ -et, így $3F + F = 4F = 36$, amiből adódik, hogy a fiúk száma 9, a lányoké pedig 27.

Tehát a fiúk száma 18-cal kevesebb a lányok számánál.

7. Egy egyenlő szárú háromszög kerülete 20 cm, az alapja 6 cm hosszú. Hány cm hosszú a háromszög egy-egy szára?

A) 5 B) 6 C) 8 **D) 7** E) 10

Legyen a háromszög alapja a , a szára pedig b . Ismerjük a háromszög alapját: $a = 6$ cm, és a területét: $K = a + 2b = 20$ cm

Ezekből a háromszög szára: $b = \frac{K-a}{2} = \frac{20 \text{ cm} - 6 \text{ cm}}{2} = \frac{14 \text{ cm}}{2} = 7$ cm

8. Peti 288 oldalt olvasott el egy könyvből, ami a könyvnek $\frac{3}{4}$ része. Hány oldalas a könyv?

A) 384 B) 376 C) 386 D) 361 E) 365

Jelölje a könyv oldalainak számát n . Tudjuk, hogy $\frac{3}{4}n = 288$.

Ebből $n = 288 \cdot \frac{4}{3} = 384$, tehát a könyv 384 oldalas.

9. Tegnapelőtt reggel 12°C volt, tegnap reggel pedig 14°C . Hány fok volt ma reggel, ha a három nap reggeli átlaghőmérséklete 11°C volt?

A) 7° B) 8° C) 9° D) 10° E) 11°

Legyen a harmadik nap reggeli hőmérséklete T .

Így a három nap átlaghőmérséklete $\frac{12^\circ\text{C} + 14^\circ\text{C} + T}{3} = 11^\circ\text{C}$.

Ebből $T = 7^\circ\text{C}$

10. Bori és Gábor testvérek. Borinak 4 lánytestvére és 3 fiútestvére van. Mennyi Gábor lánytestvérei számának és fiútestvérei számának szorzata?

A) 6 B) 8 **C) 10** D) 12 E) 15

Magát Borit is beleszámolva, összesen 5 lány és 3 fiú van a testvérek között.

Gábornak 5 lánytestvére van, de csak 2 fiútestvére (saját magát nem beleszámítva!), így a keresett szorzat a 10.

11. Melyik az a szám, amelynek a kétszerese 3-mal kisebb, mint maga a szám?

A) -6 **B) -3** C) 3 D) 6 E) más válasz

Jelöljük ezt a számot x -szel! Tudjuk, hogy $2x + 3 = x$.

Átrendezés után $x = -3$ adódik.

12. Egy négyzet alapú akvárium alapéle 40 cm, és 5 dm magasan áll benne a víz. Hány liter víz van az akváriumban?

A) 40 B) 50 C) 200 **D) 80** E) 1000

Az akváriumban álló víz térfogata:

$$V = 40 \text{ cm} \cdot 40 \text{ cm} \cdot 5 \text{ dm} = 4 \text{ dm} \cdot 4 \text{ dm} \cdot 5 \text{ dm} = 80 \text{ dm}^3, \text{ azaz } 80 \text{ liter.}$$

13. Az ábrán látható táblázat üres mezőit úgy töltöttük ki egy-egy egész számmal, hogy a sorokban, az oszlopokban és az átlókban a számok összege ugyanannyi legyen. Mennyi az x kifejezés értéke ekkor?

5	7	x
	5	

- A) 2 **B) 3** C) 5 D) 7 E) más

A táblázat első sorából tudjuk, hogy a sorokban, az oszlopokban és az átlókban a számok összege $S = 12 + x$.

Töltsük ki a táblázat alsó sorát, hogy ez az összeg kijöjjön:

- a bal mezőbe 7-et kell írni, a hozzá tartozó átló miatt: $S - x - 5$;
- a középső mezőbe x -et kell írni, a hozzá tartozó oszlop miatt: $S - 7 - 5$;
- a jobb mezőbe 5-öt kell írni, a hozzá tartozó sor miatt: $S - 7 - x$

Így keletkezik egy átló, amiben az 5, 5, 5 számok szerepelnek, azaz $S = 15$, ebből pedig $x = 3$.

14. Gyuri gazda a feleségével őszi fa- és cserjeültetést tervezett, így elmentek együtt a faiskolába. Gyuri gazda bepakolt az autójába egy köteg 2500 Ft/csemete egységárú gyümölcsfa csemetét, a felesége pedig kiválasztott egy db 1200 Ft árú ribizli cserjét. Hány db gyümölcsfa csemete volt a kötegben, amit Gyuri gazda bepakolt az autóba, ha összesen 23700 Ft-ot fizettek?

- A) 7 B) 8 **C) 9** D) 10 E) más

Jelöljük a kötegben lévő facsemeték számát N -nel! Ekkor

$$N \cdot 2500 \text{ Ft} + 1200 \text{ Ft} = 23700 \text{ Ft}$$

Rendezzük át az egyenletet:

$$N = \frac{23700 \text{ Ft} - 1200 \text{ Ft}}{2500 \text{ Ft}} = \frac{22500 \text{ Ft}}{2500 \text{ Ft}} = 9$$

Azaz a kötegben 9 db gyümölcsfa csemete volt.

15. Egy háromszög legnagyobb szöge 20° -kal nagyobb, mint a legkisebb. A legkisebb szög 7° -kal kisebb, mint a középső. Mekkora a háromszög legkisebb szöge?

- A) 30° **B) 51°** C) 56° D) 58° E) 68°

Jelöljük a háromszög szögeit az $\alpha < \beta < \gamma$ betűkkel! A feladatból a következőket tudjuk:

$$\gamma = \alpha + 20^\circ$$

$$\alpha = \beta - 7^\circ$$

Mivel ezek egy háromszög belső szögei, ezért teljesül rájuk az $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ egyenlőség. Fejezzük ki β és γ szögeket α -val, a fenti egyenlőségeket felhasználva:

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha + \underbrace{(\alpha + 7^\circ)}_{\beta} + \underbrace{(\alpha + 20^\circ)}_{\gamma} = 3\alpha + 27^\circ = 180^\circ$$

Ebből $3\alpha = 153^\circ$, amiből $\alpha = 51^\circ$.

Ellenőrzés: $\beta = 58^\circ$ és $\gamma = 71^\circ$ adódik, $51^\circ + 58^\circ + 71^\circ = 180^\circ$, és valóban α a legkisebb szög.

16. Ha 20 %-os sóoldatot szeretnénk készíteni, akkor hány gramm sót tegyünk 120 gramm vízbe?

- A) 40 B) 25 C) 20 D) 15 E) 30

Jelöljük a megoldást x -szel!

Az oldat tömege: $120 + x$, ebből az oldott anyag tömege x , és tudjuk, hogy $\frac{x}{120+x} = 20\%$, azaz $x = 24 + 0,2x$, amiből átrendezés után $x = 30$ adódik.

17. Anna és Péter jelenlegi életkorának összege 31 év. Nyolc évvel ezelőtt Péter kétszer annyi idős volt, mint Anna. Hány éves most Anna?

- A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 18

Jelöljük Anna és Péter jelenlegi életkorát A -val, illetve P -vel! A feladat szerint

$$\frac{(P - 8)}{8} = 2 \cdot \frac{(A - 8)}{8}, \text{ amiből } P = 2A - 8.$$

Péter életkora
8 évvel ezelőtt

Anna életkora
8 évvel ezelőtt

Ezen kívül tudjuk, hogy kettejük életkora jelenleg összesen 31 év, azaz $A + P = 31 = 2A - 8$, amiből átrendezés után $39 = 3A$ adódik, amiből $A = 13$, azaz Anna jelenleg 13 éves.

18. Mi az utolsó számjegye a 2024^{30} hatvány értékének, helyi értékes alakjának?

- A) 4 B) 6 C) 0 D) 3 E) más

Írjuk fel 4 hatványait, figyeljük a szabályt!

$4^1 = 4$, az utolsó számjegye 4.

4^2 egy 4-re végződő számnak a négyszerese, az utolsó számjegye 6.

4^3 egy 6-ra végződő számnak a négyszerese, az utolsó számjegye 4.

A következő hatványok felváltva 4-re és 6-ra fognak végződni.

A feladatban írt kitevő (30) páros szám, így a 4^{30} kifejezés utolsó számjegye 6, és ez egyben a 2024^{30} kifejezés utolsó számjegye is.

Megjegyzés: két egész szám szorzatának az utolsó számjegye annyi, mint a tagok utolsó számjegyei szorzatának az utolsó számjegye.

Legyen x és y egész számok, valamint a és b egyjegyű egész számok:

$$(10x + a)(10y + b) = 100xy + 10bx + 10ay + ab = 10(10xy + bx + ay) + ab$$

Mivel az első tag egy egész szám tízszerese, ezért biztosan 0-ra végződik.

Ezért elegendő a 4 hatványainak az utolsó számjegyét megvizsgálni.

19. Egy derékszögű háromszög egyik külső szöge 132° . Hány fokos ennek a háromszögnek a legkisebb belső szöge?

- A) 32° B) 38° C) 42° D) 48° E) 52°

A belső szög a külső szögnek a kiegészítő szöge, azaz $180^\circ - 132^\circ = 48^\circ$.

A háromszög belső szögeinek összege 180° , és tudjuk, hogy közülük az egyik derékszög, ezért a hiányzó harmadik szög $180^\circ - 90^\circ - 48^\circ = 42^\circ$ nagyságú.

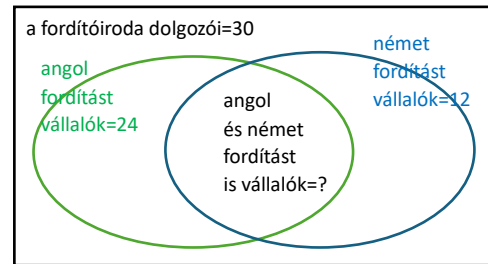
Egyben ez a háromszög legkisebb szöge.

20. Egy fordítóiroda angol és német fordítást vállal. Az irodában 30 fordító dolgozik, akiknek 40 %-a német nyelven, 80 %-a angol nyelven fordít. Hányan fordítanak mindkét nyelven?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 8

A dolgozókat ezen a halmazábrán, Venn-diagrammon lehet ábrázolni.

Tudjuk, hogy $30 \cdot 40\% = 12$ fordító vállal német, és $30 \cdot 80\% = 24$ fordító vállal angol fordítást. Ez összesen 36, ami úgy lehet, hogy közülük 6-ot kétszer számoltunk meg, mert ők mindkét nyelven vállalnak fordítást.



Formalizmussal (logikai szita):

$$|A \cup N| = |A| + |N| - |A \cap N|$$

$$|A \cap N| = |A| + |N| - |A \cup N|$$

$$|A \cap N| = 24 + 12 - 30$$

$$|A \cap N| = 6$$

21. Hány olyan hárommal osztható négyjegyű pozitív szám van, amelyben a 0 és az 1 számjegyeken kívül más számjegy nem szerepel?

A) 0 **B) 3** C) 6 D) 12 E) 24

A legnagyobb helyiértéken nem állhat 0, tehát az ezresek helyén egyes számjegy áll.

A számjegyek összege legalább 1, és legfeljebb 4 (mert a felhasználható legnagyobb számjegy az egyes). A szám akkor osztható hárommal, ha a számjegyek összege osztható hárommal, tehát a számjegyek összege biztosan 3.

Ez úgy lehetséges, ha a számjegyek közül pontosan 1 db nullás, és a többi számjegy egyes.

A nullás számjegy a százasként, a tízes vagy az egyes helyiértéken állhat. Ez 3 db keresett tulajdonságú számot jelent.

22. Egy osztály tanulói közül a szőkek és a barnák összesen 17-en vannak. A fekete hajúak kétszer annyian vannak, mint a barnák, és 2-vel kevesebben, mint a szőke hajúak. Más hajszíne senkinek nincs az osztályban. Hány szőke diák van az osztályban?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 **E) 12**

Legyen a barna hajú tanulók száma B , így a feketék száma $2B$, a szőkek száma $2B + 2$.

A szőkek és barnák száma összesen $2B + 2 + B = 17$, amiből a barnák száma $B = 5$, így a szőkek száma $2B + 2 = 12$.

Tehát 12 szőke hajú tanuló van az osztályban.

23. Egy téglalap alakú kép átlója 20 cm, szomszédos oldalainak aránya 3: 4. Hány cm a kép hosszabbik oldala?

A) 10 B) 12 C) 15 **D) 16** E) 18

Jelöljük a kép oldalait $3x$ -szel és $4x$ -szel! A kép átlója:

$$A = \sqrt{(3x)^2 + (4x)^2} = \sqrt{9x^2 + 16x^2} = \sqrt{25x^2} = 5x = 20 \text{ cm}$$

Ebből $x = 4$ cm, tehát a kép rövidebb oldala $3 \cdot 4 = 12$ cm, hosszabbik oldala $4 \cdot 4 = 16$ cm hosszú.

24. Ha 8 munkás árkot ás, és 8 óra alatt 8 m-t haladnak, akkor hány munkás szükséges ahhoz, hogy 12 óra alatt 12 m-re jussanak?

- A) 6 **B) 8** C) 10 D) 12 E) 14

Az egyenes arányosságot kell többször alkalmazni. Foglaljuk ezt táblázatba!

munkások száma	idő	méter
8	8	8
$8:8=1$	8	$8:8=1$
1	$8:8=1$	$1:8=1/8$
1	$12 \cdot 1=12$	$12 \cdot 1/8=1,5$
$8 \cdot 1=8$	12	$8 \cdot 1,5=12$

Azaz 8 munkásra van szükség, hogy 12 óra alatt 12 méter árkot ássanak.

Formalizmussal:

Feltételezve, hogy a munkások egyforma és egyenletes sebességgel ásnak, írjuk fel, hogy 1 munkás 1 óra alatt milyen hosszú árkot ás (nevezzük ezt árokásási sebességgel).

$$v_{\text{árok}} = 8 \text{ m} / 8 \text{ munkás} / 8 \text{ óra} = \frac{1}{8} \frac{\text{m}}{\text{munkás} \cdot \text{óra}}$$

Fejezzük ki a brigád méretét (munkások számát) az idővel és az árokásási sebességgel:

$$B = \frac{12 \text{ m}}{12 \text{ óra} \cdot v_{\text{árok}}} = \frac{12 \text{ m}}{12 \text{ óra} \cdot \frac{1}{8} \frac{\text{m}}{\text{munkás} \cdot \text{óra}}} = 8 \text{ munkás}$$

Azaz 8 munkásra van szükség, hogy 12 óra alatt 12 méter árkot ássanak.

25. Hány 0-ra végződik az a szám, amelyet úgy kapunk, hogy 1-től 30-ig összeszorozzuk a pozitív egész számokat?

- A) 4 B) 5 C) 6 **D) 7** E) más

Határozzuk meg a szorzat prímtényező felbontásában a 2-nek és az 5-nek a kitevőjét. Azért ezeket, mert ezek a 10-nek a prímtényezői.

A kitevők közül a kisebbik szám megadja, hogy 10-nek hányadik hatványával osztható a szorzat, azaz, hogy hány nullára végződik.

Az 5 kitevőjének a meghatározásához meg kell számolni, hogy az 5-ös szám hányszor fordul elő 1-től 30-ig a számok prímtényező felbontásában:

- minden ötödik számban egyszer (6 db)
- minden 25. számban még egyszer (1 db)

összesen 7-szer.

Most számoljuk meg a 2 kitevőit:

- minden páros (második) számban egyszer (15 db)

- minden 4. számban még egyszer (7 db)
- minden 8. számban még egyszer (3 db)
- minden 16. számban még egyszer (1 db)

összesen 26-szor.

Tehát a szorzatban az 5 kitevője 7, a 2 kitevője pedig 26.

Ez azt jelenti, hogy a szorzatból ki lehet emelni $2^7 \cdot 5^7 = (2 \cdot 5)^7 = 10^7$ -t, tehát a szorzat 7 db 0 számjegyre végződik.