XV. Békés Vármegyei Középiskolai Matematikaverseny
2023/2024

III. kategória

Megoldások

1. Egy dobozban 6 piros és 4 fehér golyó van, melyeket csak színükben tudunk megkülönböztetni egymástól.
   a) Hányféle sorrendben rakhatnánk bele egy függőleges üvegcsőbe egyesével az összes golyót egymás fölé, golyótornyot készítve?
   b) Hányféleképpen vehetünk ki a dobozból 5 golyót úgy, hogy azok között pontosan 2 fehér legyen?

Megoldás:

a) Hányféle sorrendben rakhatnánk bele egy függőleges üvegcsőbe egyesével az összes golyót egymás fölé, golyótornyot készítve?

Összesen van $6 + 4 = 10$ golyónk.

Ha mind különböző lenne, akkor az összes sorrend $10! = 3\,628\,800$ lenne.

Mivel 6 golyó színe azonosan piros (ismétlődik), ezért a pirosak közötti cserék nem hoznak új sorrendet, osztani kell 6!-sal. Hasonlóan 4 golyó színe is azonosan fehér, ezért ezek cseréje sem hoz új sorrendet, osztani kell még 4!-sal.
Így a sorrendek száma: $\frac{10!}{6!\cdot 4!} = \frac{3\,628\,800}{720\cdot 24} = 210$

b) Hányféleképpen vehetünk ki a dobozból 5 golyót úgy, hogy azok között pontosan 2 fehér legyen?

Ha pontosan 2 fehér golyót veszünk ki, akkor pontosan 3 piros golyót is kiveszünk.

A 3 piros golyót a 6 piros golyó közül vesszük ki, a sorrend nem számít:
$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = \frac{720}{6\cdot 6} = 20$$

A 2 fehér golyót a 4 fehér golyó közül vesszük ki, a sorrend nem számít:
$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{24}{2\cdot 2} = 6$$

Mivel minden piros golyóhármashoz tartozik 6 fehér golyópáros, így összesen:
$20 \cdot 6 = 120$ féleképpen lehet az 5 golyót kivenni, hogy pontosan két fehér legyen köztük.

2. A p valós paraméter mely értékei esetén nem lesz a

$$(p-2)x^2 + 2px + 1 + p = 0$$

másodfokú egyenletnek valós megoldása?

Megoldás:

Ha $p = 2$, akkor a $4x + 3 = 0$ egyenlet elsőfokú, ami ellentmond a feladatnak (másodfokú), vagy ha $p = 2$ lenne, akkor a $4x + 3 = 0$ egyenletnek van valós megoldása ($x = -3/4$), tehát:

$$p \neq 2$$

A másodfokú egyenletnek nincs valós megoldása, ha a diszkrimináns negatív előjelű.

(Ez a pont akkor is jár, ha csak a megoldásból derül ki a gondolat)

$$D = (2p)^2 - 4(p-2)(1+p) < 0$$

$$4p^2 - 4(p^2 - p - 2) < 0$$

$$p + 2 < 0$$

$$p < -2$$

Válasz: tehát a feladatban szereplő másodfokú egyenletnek akkor nincs valós megoldása, ha

$$p < -2$$

vagy:

$$p \in \,]-\infty;\, -2[$$

A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésedre.
Válaszaidat számolással, szövegesen kellően indokold, a gondolatod menete jól látható legyen!
Használható eszközök: számológép, függvénytáblázat, író- és rajzeszközök
Minden feladat helyes megoldásáért 10 pont jár.

3. Tavaly, 2023-ban, az Óperenciás tengeren túl egy hatalmas, 12 km oldalhosszúságú, szabályos sokszög alakú erdőt fedeztek fel (a szabályos sokszög minden szöge és minden oldala egyenlő).

   a) Hány oldalú ez a szabályos sokszög, ha drónok segítségével meg tudták mérni, hogy a sokszög egy belső szöge 160°-os?
   b) Melyik számnak van több pozitív osztója: a sokszög km-ben mért oldalhosszúsága mérőszámának vagy a felfedezés évszámának?

Megoldás:

a) Hány oldalú ez a szabályos sokszög, ha drónok segítségével meg tudták mérni, hogy a sokszög egy belső szöge 160°-os?

Jelöljük a szabályos sokszög oldalainak (szögeinek) a számát n-nel!

A belső szögek összegére vonatkozó összefüggést és a szabályosságot kihasználva kapjuk, hogy

$$\frac{(n-2)\cdot 180}{n} = 160^{\circ}$$

amiből:

$$n = 18$$

Tehát a szabályos sokszög $n = 18$ oldalú.

b) Melyik számnak van több pozitív osztója: a sokszög km-ben mért oldalhosszúsága mérőszámának vagy a felfedezés évszámának?

Mindkét esetben segít az osztók számának meghatározásában a számok prímtényezős felbontása.

$$12 = 3 \cdot 2^2$$

A 12 pozitív osztói: $\mathbf{1}$; $\mathbf{3}$; $\mathbf{2}$; $2^2 = \mathbf{4}$; $3 \cdot 2 = \mathbf{6}$; $3 \cdot 2^2 = \mathbf{12}$

Ez összesen: 6 db

$$2023 = 7 \cdot 17^2$$

A 2023 pozitív osztói: $\mathbf{1}$; $\mathbf{7}$; $\mathbf{17}$; $17^2 = \mathbf{289}$; $7 \cdot 17 = \mathbf{119}$; $7 \cdot 17^2 = \mathbf{2023}$

Ez is összesen: 6 db

Tehát a 12-nek és a 2023-nak ugyanannyi pozitív osztója van.

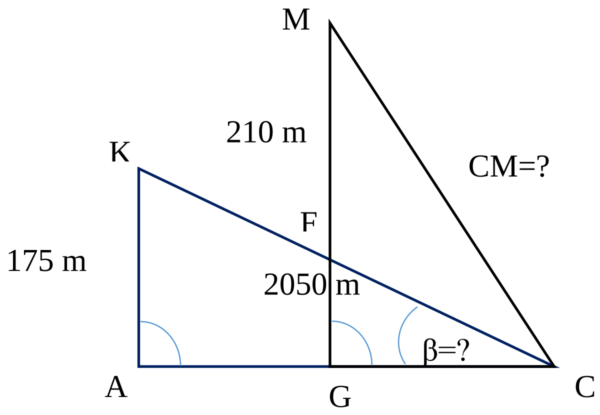
Megjegyzés: természetesen megoldható a feladat b) része közvetlenül úgy is, hogy a pozitív osztók számát úgy számoljuk ki, hogy az 1-gyel megnövelt prímkitevőket összeszorozzuk.

Ez mindkét esetben: $(1+1)(2+1) = 6$

4. Egy madár egy adott pillanatban a völgyben lévő turista centrumot és a hegyen lévő kilátót összekötő egyenes drótkötélpálya felezőpontja felett van, attól pontosan 210 m távolságban, függőleges irányban. A drótkötélpálya hossza 2050 m, szintkülönbsége 175 m..
   a) Készíts vázlatot a lényeges adatok feltüntetésével!
   b) A vízszinteshez képest hány fokos az emelkedési szöge a drótkötélpályának?
   c) Hány méterre van ekkor a madár a turista centrumtól? Egészre kerekíts!

Megoldás:

a) Készíts vázlatot a lényeges adatok feltüntetésével!



Jelölések:

C: turista centrum, M - madár, K - kilátó, CK - drótkötélpálya, F - drótkötélpálya felezőpontja

Távolságok: $AK = 175$ m, $CK = 2050$ m, $FM = 210$ m

Konstrukcióból: $AK; GM \perp AC$

Keressük: $CM =?$ és $\beta =?$

b) A vízszinteshez képest hány fokos az emelkedési szöge a drótkötélpályának?

Az ACK derékszögű háromszögben:

$$\sin\beta = \frac{175}{2050}$$
$$\beta \approx 5°$$

c) Hány méterre van ekkor a madár a turista centrumtól? Egészre kerekíts!

Az ACK derékszögű háromszögben:

$$\cos 5^{\circ} = \frac{AC}{2050} \Longrightarrow AC = 2042{,}52$$

Mivel $ACK\Delta \sim GCF\Delta$ (két-két szög azonos) és $k = \frac{1}{2}$, így a GCF derékszögű háromszögben:

$$FG = \frac{175}{2} = 87{,}5 \text{ és } GC = 1021{,}26$$

Mivel: $GM = 87{,}5 + 210 = 297{,}5$

ezért:

$$1021{,}26^2 + \left(\frac{175}{2} + 210\right)^2 = CM^2$$

$$1042971{,}988 + 88506{,}25 = CM^2$$

$$1131478{,}238 = CM^2$$

$$1063{,}7 = CM \quad (CM > 0)$$

Tehát a madár **1064** m-re van a turista centrumtól ($CM \approx 1064$).

5. Ákos a téli szünetben a barátaival kipróbálta a város új szabaduló szobáját. Az utolsó feladattal nehezen boldogultak, de szerencsére végül megoldották a rejtélyt, amely így szólt: „Ezen az ajtón csak azok léphetnek ki, akik bebillentyűzik a helyes kódot, ami nem más, mint a varázsló életkora a 10-es számrendszerben. Ez az életkor egy n alapú számrendszerben felírva 216_n. Ugyanebben a számrendszerben a fokokban mért teljes szög mérőszáma 550_n." Mit billentyűztek be Ákosék, ha kiszabadultak?

Megoldás:

Egy n alapú számrendszerben az n egész kitevőjű hatványai a helyiértékek.
A számrendszer alapszámának kiszámításához vizsgáljuk először a második feltételt!
A teljes szög mérőszáma 360.

$$550_n = 5n^2 + 5n + 0 \cdot 1$$

$$5n^2 + 5n + 0 \cdot 1 = 360$$

$$5n^2 + 5n - 360 = 0$$

$$n^2 + n - 72 = 0$$

Az egyenlet gyökei: $n_1 = -9$, illetve $n_2 = 8$
Egy számrendszer alapszáma csak pozitív egész szám lehet, ezért $n = 8$.

Ekkor a varázsló életkora az első feltétel alapján:

$$216_n = 2n^2 + 1 \cdot n + 6 = 2 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8 + 6 = 2 \cdot 64 + 1 \cdot 8 + 6 = 142$$

Tehát a varázsló 142 éves (a tízes számrendszerben), így Ákoséknak a kiszabaduláshoz a 142-t kellett bebillentyűzni.

Megjegyzés: az életkor soknak tűnik, de egy varázsló életkora, tudjuk a mesékből, akármekkora is lehet.