XV. Békés Vármegyei Középiskolai Matematikaverseny 2023/2024

II. kategória

Megoldások

1. István két használt mobiltelefont adott el azonos áron. Az egyiket 20 %-kal drágábban, a másikat 20 %-kal olcsóbban tudta eladni a korábbi vételi árakhoz képest. Így összesen 10 000 Ft-tal kevesebbet kapott értük, mint amennyiért vette ezeket. Mennyiért vette és adta el István a mobiltelefonokat?

Megoldás:

Jelöljük a telefonok eredeti árát x-szel- és y-nal!

Az eladási ár így $1{,}2 \cdot x$ és $0{,}8 \cdot y$ lett.

Az eladás azonos áron történt, ezért fel tudunk írni egy egyenletet:

$$1{,}2x = 0{,}8y$$

Az eladási ár 10000 Ft-tal kisebb, mint összesen a korábbi vételi ár, így ezt a relációt egyenlettel is felírhatjuk:

$$x + y - 10000 = 1{,}2x + 0{,}8y$$

A két egyenletből álló egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\begin{cases} 1{,}2x = 0{,}8y \\ x + y - 10000 = 1{,}2x + 0{,}8y \end{cases}$$

Az egyenletrendszert megoldva kapjuk az eredeti árakat Ft-ban:

$$\begin{cases} 1{,}5x = y \\ 0{,}2y - 0{,}2x = 10000 \end{cases}$$

$$x = 100000 \quad y = 150000$$

Ellenőrzés igazolja a számításainkat, tehát a két telefon eredeti ára $x = 100000$ Ft és $y = 150000$ Ft volt.

2. Adjuk össze 1-től 2024-ig az összes természetes számot váltakozó (a páratlanokat pozitív, a párosakat negatív) előjellel:

$$1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + 2023 - 2024$$

Mennyi ennek az összegnek az értéke?

Megoldás:

Állítsuk elő az összeget más alakban! Adjuk hozzá kétszer a páros számok összegét, és vonjuk is ki kétszer (teve-elv), majd a negatív tagokból emeljük ki a -2-t:

$$1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + 2023 - 2024 =$$

$$= (1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 2022 + 2023 + 2024) - 2(2 + 4 + \cdots + 2022 + 2024)$$

Az összeget különbséggel felírva kiszámoljuk a két zárójelben lévő összeget (kis Gauss módszer):

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 2023 + 2024 = \frac{1 + 2024}{2} \cdot 2024 = 2025 \cdot 1012$$

$$2 + 4 + \cdots + 2022 + 2024 = 2(1+2+3+\ldots+1011+1012) = 2 \cdot \frac{1+1012}{2} \cdot 1012 = 1013 \cdot 1012$$

Az eredeti összegre kapjuk:

$$1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + 2023 - 2024 =$$

$$= 2025 \cdot 1012 - 2 \cdot 1013 \cdot 1012 = (2025 - 2026) \cdot 1012 = \mathbf{-1012}$$

Másik lehetőség:

Az eredeti összeget két tagonként csoportosíthatjuk, zárójelezhetjük (asszociativitás):

$$1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + 2023 - 2024 = (1 - 2) + (3 - 4) + \cdots + (2023 - 2024)$$

Mivel minden zárójelben -1 az összeg és 1012 zárójelpár van,

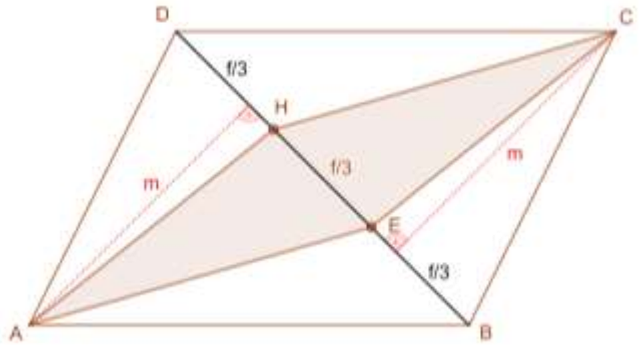
így az eredeti összeg: $-1 \cdot 1012 = \mathbf{-1012}$

3. Az $ABCD$ paralelogramma BD átlóján bejelöljük az E és H harmadoló pontokat, így kapunk egy $AECH$ négyszöget.

   a) Készíts vázlatot a lényeges adatok megjelenítésével!
   b) Az $AECH$ négyszög területe hányadrésze az $ABCD$ paralelogramma területének?
   c) Indokoljuk meg részletesen, miért lett az $AECH$ négyszög paralelogramma!

Megoldás:

a) Készíts vázlatot a lényeges adatok megjelenítésével!



b) Az $AECH$ négyszög területe hányadrésze az $ABCD$ paralelogramma területének?

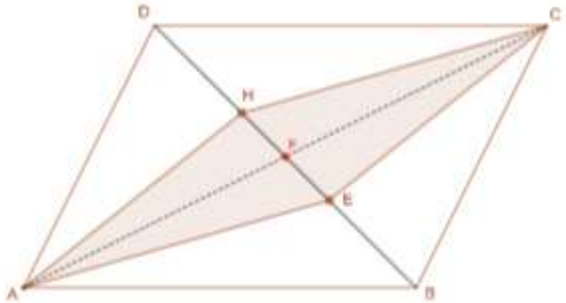
Az $ABCD$ paralelogramma BD átlója (f) 2 egybevágó háromszögre ($ABD\Delta \cong BCD\Delta$) bontja a négyszöget.

Mindkét háromszögben a közös BD oldal, mint alap, 3 egyenlő részből ($f/3$) áll, ezáltal mindkét háromszög $3-3$ egyenlő területű háromszöget jelent, hisz ezek magassága (m) egyforma.

Vagyis az $ABCD$ paralelogramma 6 egyenlő területű háromszögből áll, míg az $AECH$ négyszög 2 egyenlő területű háromszögből tevődik össze.

Az $AECH$ négyszög területe $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ része az $ABCD$ paralelogramma területének.

c) Indokoljuk meg részletesen, miért lett az $AECH$ négyszög paralelogramma!



Meg kell indokolnunk, hogy az $AECH$ négyszög két szemközti oldala párhuzamos és egyenlő, vagy két-két szemközti oldala párhuzamos, vagy a **négyszög középpontosan szimmetrikus**.

Az $ABCD$ paralelogrammában A és C csúcsok középpontosan szimmetrikusak az átlók felezőpontjára.

Az $AECH$ négyszög E és H csúcsai a BD átlón vannak $\frac{1}{6}$-nyi távolságra az átlók metszéspontjától, így az E és H csúcsuk is középpontosan szimmetrikusak.

Tehát az $AECH$ négyszög is középpontosan szimmetrikus az átlók metszéspontjára, így az $AECH$ négyszög paralelogramma.

4. A népességkutatók (demográfusok) egy kisebb város lakosságszámának változását vizsgálják. Szerintük a lakosság számát a várossá nyilvánítástól eltelt x évet számítva a következő másodfokú függvény írja le jó közelítéssel:

$$f(x) = -5x^2 + 275x + 10000$$

   a) Hol metszi az $f(x)$ függvény grafikonja az y tengelyt, vagyis mennyi volt a lakosságszám a várossá nyilvánításkor?
   b) Mennyi lesz a lakosság száma 20 évvel a várossá válás után az $f(x)$ szerint?
   c) A várossá nyilvánítástól hány év múlva következne be az $f(x)$ függvénnyel való leírás szerint a városka teljes elnéptelenedése?

Megoldás:

a) Hol metszi az $f(x)$ függvény grafikonja az y tengelyt, vagyis mennyi volt a lakosságszám a várossá nyilvánításkor?

Az $f(0)$ helyettesítési érték adja az y tengellyel való metszéspontot:

$$f(0) = -5 \cdot 0^2 + 275 \cdot 0 + 10000 = 10000$$

A várossá nyilvánításkor a lakosság 10000 fő.

b) Mennyi lesz a lakosság száma 20 évvel a várossá válás után az $f(x)$ szerint?

A város lakosságának számát 20 év elteltével az $f(20)$ helyettesítési érték adja:

$$f(20) = -5 \cdot 20^2 + 275 \cdot 20 + 10000 = 13500$$

A várossá nyilvánítástól eltelt 20 év esetén a lakosságszám 13500 fő.

c) A várossá nyilvánítástól hány év múlva következne be az $f(x)$ függvénnyel való leírás szerint a városka teljes elnéptelenedése?

Az elnéptelenedés a függvény szerint akkor következik be, ha $f(x) = 0$.

Az $f(x)$ függvény zérushelyét keressük, melyet az alábbi egyenletből kapjuk:

$$-5x^2 + 275x + 10000 = 0$$

Az egyenlet két megoldása a másodfokú egyenlet megoldó képletéből adódik:

$$x_{1/2} = \frac{-275 \pm \sqrt{275^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 10000}}{2 \cdot (-5)} = \frac{-275 \pm \sqrt{75625 + 200000}}{-10} = \frac{-275 \pm 525}{-10}$$

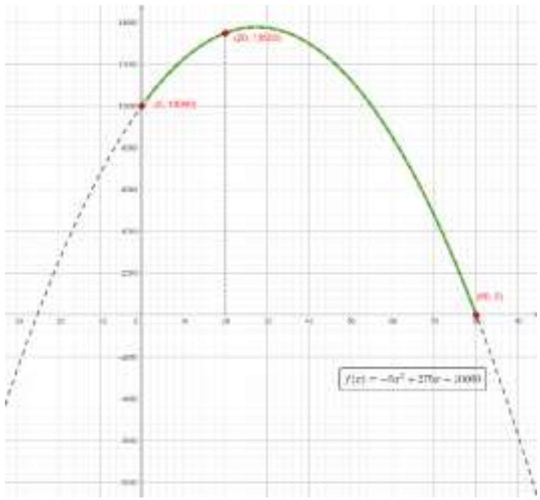
amiből: $x_1 = -25$ $\quad$ $x_2 = 80$

A két megoldásból tartalmilag az $x_2 = 80$ adja a megfelelő évet.

Az ellenőrzés után válaszolhatunk: tehát az $f(x)$ szerint 80 év múlva következne be a városka teljes elnéptelenedése.

Megjegyzések:

- Természetesen a c) kérdésnél ez egy elméleti (hipotetikus) meggondolás, hiszen a gyakorlatban ez minden bizonnyal nem így, nem ekkor következne be, hiszen a városka vezetői, látván a folyamatot, időben megteszik a szükséges lépéseket.
- A folyamat függvénye szemléltethető GeoGebra segítségével, azzal meg is oldható. A nagy adatok miatt természetesen a grafikus megoldás a versenyen szóba sem jöhet, de szemléletformáló.



5. Tekintsük a háromjegyű természetes számokat!
   a) Hány olyan van közöttük, amelyek oszthatók 2-vel is, 5-tel is és 11-gyel is?
   b) Hány háromjegyű természetes szám van, amelyik nem osztható sem 3-mal, sem 7-tel?

Megoldás:

a) Hány olyan van közöttük, amelyek oszthatók 2-vel is, 5-tel is és 11-gyel is?

Ha egy szám osztható 2-vel is, 5-tel is és 11-gyel is, akkor osztható a szorzatukkal, azaz 110-zel is, hiszen a 2 , az 5 és a 11 relatív prímek, legnagyobb közös osztójuk 1.

Keresnünk kell a 110-zel osztható háromjegyű természetes számokat.
Ezek: 110; 220; 330; 440; 550; 660; 770; 880; 990
Összesen: 9 db

b) Hány háromjegyű természetes szám van, amelyik nem osztható sem 3-mal, sem 7-tel?

Indirekt gondolkodási módszerrel oldjuk meg a feladatot. Először azt keressük meg, hányan vannak olyanok, amelyek 3-mal vagy 7-tel (legalább az egyikkel) oszthatók. Utána az összes háromjegyű természetes számból kivonjuk a 3-mal vagy 7-tel (legalább az egyikkel) osztható számokat.

Vezessük be a következő halmazokat:

$$H = \{a\ háromjegyű\ természetes\ számok\}$$

$$A = \{3 - mal\ osztható\ háromjegyű\ természetes\ számok\}$$

$$B = \{7 - tel\ osztható\ háromjegyű\ természetes\ számok\}$$

A háromjegyű természetes számok száma: $|H| = 900$

A 3-mal osztható háromjegyű természetes számok száma: $|A|$ =300

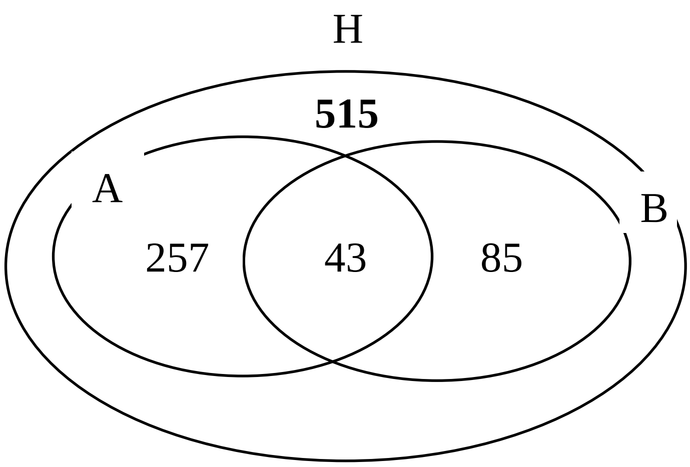
A 7-tel osztható háromjegyű természetes számok száma $|B| = 128$.

A 3-mal is és 7-tel is (relatív prímek, így 21-gyel is) osztható háromjegyű természetes számok száma:

$$|A \cap B| = 43$$

2 pont

A három halmaz viszonyát Venn-diagrammal jelölhetjük, az egyes különálló (diszjunkt) részhalmazok elemszámával:



A 3-mal vagy 7-tel (legalább az egyikkel) osztható számok halmazának ($A \cup B$) elemszáma:

$$|A \cup B| = 257 + 43 + 85 = 385$$

vagy

$$|A \cup B| = 300 + 128 - 43 = 385$$

Ha az összes háromjegyű természetes számból elvesszük a 3-mal vagy 7 −tel (legalább az egyikkel) osztható számok számát /logikai szitát alkalmazva/, megkapjuk a sem 3-mal, sem 7-tel nem osztható háromjegyű természetes számok számát ($\overline{A \cup B} = H\backslash(A \cup B)$):

$$|\overline{A \cup B}| = |H\backslash(A \cup B)| = 900 - (300 + 128 - 43) = 900 - 385 = 515$$

Tehát 515 háromjegyű természetes szám van, amely nem osztható sem 3-mal, sem 7-tel.

Megjegyzés: Természetesen nem kell ilyen precíz formalizmussal, tételekre hivatkozva indokolni a megoldást. Elegendő szövegesen megmagyarázni, műveletekkel is alátámasztani az eredményeket. A lényeg, a gondolat menete látszódjon.