Bolyai János Matematikai Társulat Békés Megyei Tagozata
Oktatási Hivatal Békéscsabai Pedagógiai Oktatási Központ
2024. január 22.

XV. Békés Vármegyei Középiskolai Matematikaverseny
2023/2024
IV. kategória
Megoldások

1. Egy téglatest alakú tartály alapélei 1518 mm és 934 mm, testátlója 2023 mm.
   a) Hány mm hosszú a téglatest harmadik éle?
   b) Hány dm magasan állna ebben a tartályban az 1000 liter víz?

Megoldás:

a) Hány mm hosszú a téglatest harmadik éle?

$$2023 = \sqrt{1518^2 + 934^2 + c^2}$$

$$4092529 = 2304324 + 872356 + c^2$$

$$4092529 = 3176680 + c^2$$

$$915849 = c^2$$

$$957 = c \qquad (c > 0)$$

Tehát a harmadik él **957** mm hosszú.

b) Hány dm magasan állna ebben a tartályban az 1000 liter víz?

A téglatest tartály alaplapjának területe: $T = 1518 \cdot 934 = 1417812$ mm^2 = 141,7812 dm^2

Jelöljük a tartályban lévő víz dm-ben mért magasságát x-szel! Felhasználva, hogy 1000 liter = 1000 dm^3, a víz térfogatára felírható:

$$1000 = 141{,}7812 \cdot x$$

$$x = 7{,}053 \text{ dm}$$

Válasz: A víz **7,1 dm** magasan áll a tartályban.

Megjegyzés: mivel a feladat nem kért kerekítést, ezért a b) rész pontosabb helyes eredmény is elfogadható.

A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésedre.
Válaszaidat számolással, szövegesen kellően indokold, a gondolatod menete jól látható legyen!
Használható eszközök: számológép, függvénytáblázat, író- és rajzeszközök
Minden feladat helyes megoldásáért 10 pont jár.

2. Egy tízes számrendszerben felírt háromjegyű számból kivonjuk azt a kétjegyű, majd egyjegyű számot, amelyeket az eredeti szám utolsó, illetve utolsó két számjegyének elhagyásával kapunk, az eredmény 204 lesz. Mi volt az eredeti háromjegyű szám?

Megoldás:

Az eredeti háromjegyű szám legyen a szokásos jelöléssel: $\overline{xyz}$

Ezt helyiértékes alakban felírva kapjuk: $\overline{xyz} =$ 100x+10y+z

A szöveg alapján, és a helyiértékes jelölést használva:

$$\overline{xyz} - \overline{xy} - x = 100x + 10y + z - (10x + y) - x = 204$$

$$89x + 9y + z = 204$$

Tudjuk, hogy az $x; y; z$ egyjegyű természetes számok.

Vizsgáljuk először az x lehetséges értékeit!

Ha $x \geq 3$, akkor a bal oldal $\geq 267 > 204$, ellentmondás.

Ha $x \leq 1$, akkor a bal oldal $\leq 170 < 204$, ellentmondás.

Ezek szerint csak $x = 2$ lehetséges, ekkor:

$$178 + 9y + z = 204$$

$$9y + z = 26$$

Most vizsgáljuk az y lehetséges értékeit!

Ha $y \geq 3$, akkor a bal oldal $\geq 27 > 26$, ellentmondás.

Ha $y \leq 1$, akkor a bal oldal $\leq 18 < 26$, ellentmondás.

Ezek szerint csak $y = 2$ lehetséges, ekkor:

$$18 + z = 26$$

$$z = 8$$

Válasz: mivel $x = 2;\ y = 2;\ z = 8$, így a keresett, eredeti háromjegyű szám a 228.

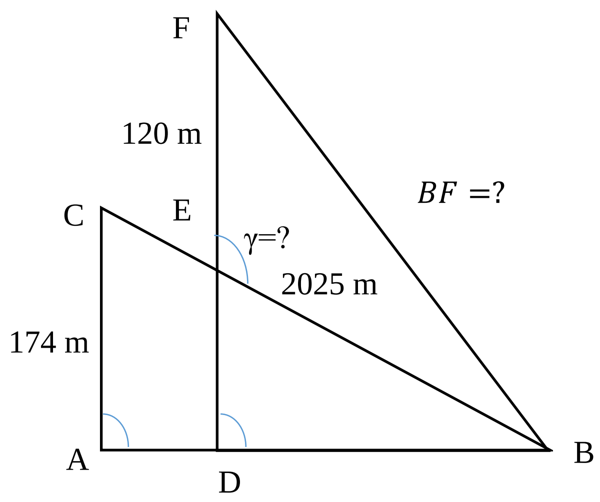
Ellenőrzés: $228 - 22 - 2 = 204$ igaz, így a válaszunk helyes.

3. Egy madár egy adott pillanatban a völgyben lévő turista centrumot és a hegyen lévő kilátót összekötő egyenes drótkötélpályának a magasabban lévő harmadoló pontja felett van, attól pontosan 120 m távolságban, függőleges irányban. A drótkötélpálya hossza 2025 m, a szintkülönbsége 174 m.

   a) Készíts vázlatot a lényeges adatok feltüntetésével!
   b) Hány méterre van ekkor a madár a turista centrumtól?
   c) A drótkötélpálya magasabban lévő harmadoló pontjából hány fokos szög alatt látszik a turista centrum és a madár által meghatározott szakasz?

Megoldás:

a) Készíts vázlatot a lényeges adatok feltüntetésével!



Jelölések:

B: turista centrum, F - madár, C - kilátó, BC - drótkötélpálya, E - drótkötélpálya harmadoló pontja

Távolságok: $AC = 174$ m, $BC = 2025$ m, $EF = 120$ m

Konstrukcióból: $AC; DF \perp AB$

Keressük: $BF =$? és $\gamma =$?

b) Hány méterre van ekkor a madár a turista centrumtól?

Az ABC (derékszögű) háromszögben a harmadolás és a párhuzamos szelők tétele értelmében:

$$\frac{BE}{BC} = \frac{BD}{BA} \Rightarrow \frac{BE}{2025} = \frac{2}{3} \Rightarrow BE = \frac{2 \cdot 2025}{3} = 1350$$

Az ABC (derékszögű) háromszögben a harmadolás és a párhuzamos szelőszakaszok tétele értelmében:

$$\frac{DE}{AC}=\frac{BE}{BC}\Longrightarrow\frac{DE}{174}=\frac{1350}{2025}\Longrightarrow DE=\frac{174\cdot 1350}{2025}=116$$

A BED derékszögű háromszögben (konstrukció) a Pitagorasz tételből adódik:

$$BD=\sqrt{1350^2-116^2}=1345$$

Ezek után a BDF derékszögű háromszögben (konstrukció) szintén a Pitagorasz tétele miatt:

$$BF=\sqrt{1345^2+(116+120)^2}=1365{,}55$$

Tehát a madár kb. $\mathbf{1365,6}$ **m**-re van a turista centrumtól.

c) A drótkötélpálya magasabban lévő harmadoló pontjából hány fokos szög alatt látszik a turista centrum és a madár által meghatározott szakaszt?

A vázlat szerint az FEB háromszög E csúcsánál lévő szöget kell kiszámítani ($\gamma=?$).
Célszerű a koszinusz tételt alkalmazni. Fel kell használni a korábban kiszámolt adatokat:

$$1365{,}6^2=1350^2+120^2-2\cdot 1350\cdot 120\cdot cos\gamma$$

$$cos\gamma=-0{,}0863$$

$$\gamma=95{,}0°$$

Tehát a madár kb. $95{,}0°$ $-$os szög alatt látja a BF szakaszt.

Megjegyzések:

- Természetesen a megoldás során más eszközöket és sorrendet is lehetett alkalmazni: hasonlóság, szögfüggvények
- A feladat nem írt elő kerekítési pontosságot, ezért bármilyen, bármikor alkalmazott, szokásos (kb. $\pm 5\%$) kerekítéseket alkalmazva is elfogadható a megoldás, még ha az értékek különböznek is a fentiektől.

4. Nyolc csapat egyfordulós, körmérkőzéses bajnokságban vesz részt, ahol mindenki mindenkivel egyszer játszik.

   a) Kati azt állítja, hogy összesen 56 mérkőzést fognak játszani a csapatok egymással. Indokold meg, igaza van vagy nincs igaza Katinak!
   b) Ha eddig minden csapat 3 mérkőzésén van túl, akkor összesen több vagy kevesebb meccs van hátra, mint amennyit eddig összesen lejátszottak?
   c) Igaz-e az, hogy ha a csapatok éppen 17 mérkőzést játszottak le összesen, akkor biztos van közöttük legalább egy csapat, amelyik legalább 5 meccsen volt túl?

Megoldás:

a) Kati azt állítja, hogy összesen 56 mérkőzést fognak játszani a csapatok egymással. Indokold meg, igaza van vagy nincs igaza Katinak!

Mivel a 8 csapat az egyfordulós, körmérkőzéses bajnokságban összesen $\frac{8\cdot 7}{2}=\mathbf{28}$ mérkőzést játszik, így Katinak **nincs igaza.**

b) Ha eddig minden csapat 3 mérkőzésén van túl, akkor összesen több vagy kevesebb meccs van hátra, mint amennyit eddig összesen lejátszottak?

Ha eddig minden csapat 3 mérkőzésén van túl, akkor eddig $\frac{8\cdot 3}{2}=12$ lejátszott meccs volt összesen. Így a hátralévő mérkőzések száma: $28-12=16$, tehát **több** meccs van még hátra, mint amennyit eddig összesen lejátszottak.

c) Igaz-e az, hogy ha a csapatok éppen 17 mérkőzést játszottak le összesen, akkor biztos van közöttük legalább egy csapat, amelyik legalább 5 meccsen volt túl?

Ha nem lenne legalább egy ilyen csapat, akkor minden csapat 5-nél kevesebb meccsen lenne túl, vagyis mindegyik legfeljebb 4 meccset játszott volna le.
Az összes lejátszott mérkőzés ekkor legfeljebb (maximum): $\frac{8\cdot 4}{2}=16$

Mivel $16<17$, ez ellentmond annak, hogy éppen 17 mérkőzést játszottak le, tehát biztosan kell lenni legalább egy (akár több) csapatnak, amelyik legalább (minimum) 5 meccset (esetleg többet is) játszott le (skatulya-elv).

5. A takarékos Pista bácsi öt év múlva, január elején megy nyugdíjba. A hivatalos nyugdíját ki szeretné egészíteni, ezért 5 éven keresztül előtakarékoskodik, minden hónap elején betesz a bankba 50000 forintot. Nyugdíjba vonulásától számított 10 éven keresztül minden év elején azonos összeget tervez felvenni. A bank mindvégig évi 6 %-os kamatlábbal számol. A betéteknél minden hónap végén, a kivételnél minden év végén írja jóvá a járó kamatokat (p %-os éves kamatláb esetén a havi kamatláb $\frac{p}{12}$ %).
   a) Mennyi megtakarítása lesz Pista bácsinak a nyugdíjba vonulásakor?
   b) Mekkora összeget tud felvenni nyugdíjas korában minden év elején egy összegben Pista bácsi, ha kiszámolta, hogy a 10. pénzfelvétel után el fog fogyni a megtakarítása? Válaszodat mindkét esetben 1000 Ft-ra kerekítve add meg!

Megoldás:

a) Mennyi megtakarítása lesz Pista bácsinak a nyugdíjba vonulásakor?

Pista bácsi megtakarításának 5 éve $5 \cdot 12 = 60$ hónapot jelent havi $\frac{6}{12} = 0{,}5\%$ kamatlábbal:

Jelöljük t_0-lal a havonta betett pénzt, majd foglaljuk táblázatba a megtakarítás adatainak egy részét, hogy a szabályt felismerjük!

	Hó végén a bankban lévő pénz
1. hónap vége	$t_0 \cdot 1{,}005$
2. hónap vége	$t_0 \cdot 1{,}005 + t_0 \cdot 1{,}005^2$
3. hónap vége	$t_0 \cdot 1{,}005 + t_0 \cdot 1{,}005^2 + t_0 \cdot 1{,}005^3$
...	...
60. hónap vége	$t_0 \cdot 1{,}005 + t_0 \cdot 1{,}005^2 + t_0 \cdot 1{,}005^3 + t_0 \cdot 1{,}005^{60}$

Felismerhetjük, hogy a 60. hónap végére a kamatos kamattal számított megtakarított pénz egy mértani sorozat első 60 elemének az összege ($t_0 \cdot 1{,}005; q = 1{,}005$).

A mértani sorozat első 60 elemének összege:

$$S_{60} = t_0 \cdot 1{,}005 + t_0 \cdot 1{,}005^2 + t_0 \cdot 1{,}005^3 + \cdots + t_0 \cdot 1{,}005^{60} =$$

$$= t_0 \cdot 1{,}005 \cdot \frac{1{,}005^{60} - 1}{1{,}005 - 1} = 50000 \cdot 1{,}005 \cdot \frac{0{,}34885}{0{,}005} = 3505944$$

Pista bácsinak nyugdíjba vonulásakor $S = \mathbf{3506000}$ **Ft** lesz a megtakarítása 1000 Ft-ra kerekítve.

b) Mekkora összeget tud felvenni nyugdíjas korában minden év elején egy összegben Pista bácsi, ha kiszámolta, hogy a 10. pénzfelvétel után el fog fogyni a megtakarítása? Válaszodat mindkét esetben 1000 Ft-ra kerekítve add meg!

Jelöljük x-szel a Pista bácsi által minden év elején felvett összeget, majd foglaljuk táblázatba az adatok egy részét, hogy a szabályt felismerjük!

	A felvétel után a bankban lévő pénz
1. felvétel után	$S-x$
2. felvétel után	$(S-x)\cdot 1{,}06\ -\ x$
3. felvétel után	$S\cdot 1{,}06^2 - x\cdot 1{,}06^2 -\ x\cdot 1{,}06\ -\ x$
10. felvétel után	$S\cdot 1{,}06^9 - x\cdot 1{,}06^9 - x\cdot 1{,}06^8 - \cdots - x$

Az utolsó kivétel után nem marad pénz a számlán:

$$S\cdot 1{,}06^9 - x\cdot 1{,}06^9 - x\cdot 1{,}06^8 - \cdots - x = 0$$

$$S\cdot 1{,}06^9 - x(1{,}06^9 + 1{,}06^8 + \cdots + 1) = 0$$

$$3506000\cdot 1{,}06^9 - x(1{,}06^9 + 1{,}06^8 + \cdots + 1) = 0$$

$$3506000\cdot 1{,}06^9 = x(1{,}06^9 + 1{,}06^8 + \cdots + 1)$$

A zárójelben ismét egy tízelemű mértani sorozat (a_0=1; q'=1,06) első tíz elemének az összege (S'_{10}) szerepel:

$$3506000\cdot 1{,}06^9 = x\cdot S'_{10}$$

$$3506000\cdot 1{,}06^9 = x\cdot\frac{1{,}06^{10}-1}{1{,}06-1}$$

$$5\,923\,313{,}23 = 13{,}18\cdot x$$

$$449416{,}785\ =\ x$$

Pista bácsi minden év elején 450000 Ft-ot vehet fel 1000 Ft-ra kerekítve.

Megjegyzések:

- Természetesen a megoldás során alkalmazhatók közvetlen összefüggések (pl. járulékszámítás) is.
- A feladat nem írt elő kerekítési pontosságot, csak a végére (1000 Ft), ezért a korábbi, más pontosságú számolás miatt a végeredmények eltérhetnek az útmutatótól. Ezért bármilyen, bármikor alkalmazott, szokásos (kb. $\pm 5\%$) kerekítéseket alkalmazva is elfogadható a megoldás, még ha az értékek különböznek is a fentiektől.
- Jól szemléltethető a diákoknak: annak ellenére, hogy Pista bácsi 3000000 Ft-ot fizetett be, ez a kamatos kamat miatt 3506000 Ft lett, és ebből a további kamatozás miatt 4500000 Ft-ot tudott kivenni 10 év alatt.