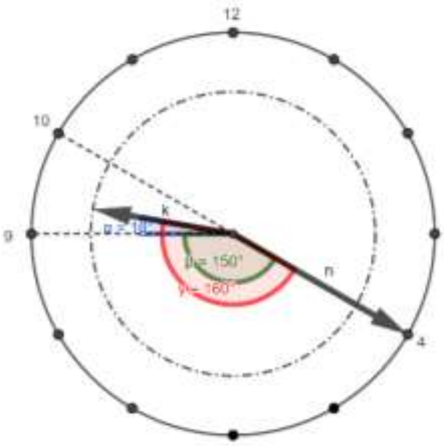
Bolyai János Matematikai Társulat Békés Megyei Tagozata
Oktatási Hivatal Békéscsabai Pedagógiai Oktatási Központ
2024. január 22.

XV. Békés Vármegyei Középiskolai Matematikaverseny
2023/2024
V. kategória
Megoldások-pontozási útmutató

1. Pontosan hány fokos szöget zár be egymással az óra nagy- és kismutatója 21 óra 20 perckor?

Megoldás:



Az óra nagymutatója 21 óra 00 perckor pontosan a 12-esre, a kismutató pontosan a 9-esre mutat.
A nagymutató 21 óra 20 perckor pontosan a 4-es számjegyre mutat.

A kismutató elfordul, a 9-es és a 10-es szám között lesz.
Azt kell kiszámolni, hány fokos szöget fordul el a kismutató a 9-esről a 10-es felé, amíg a nagymutató a 12-esről elfordul az 4-esre.
Az elfordulások szöge mindig egyenes arányos az eltelt idővel.

Ez idő alatt 20 perc telik el, ami a 60 percnek $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$ része, így a kismutató a 9-es és a 10-es közötti 30°-os középponti szög szintén $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$ részét fordulja el, ami pontosan $\frac{1}{3} \cdot 30^\circ = 10^\circ$.

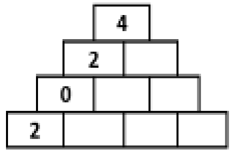
Mivel az 4-es és a 9-es szám között $5 \cdot 30^\circ = 150^\circ$-os középponti szög van (a nagymutató $5 \cdot 30^\circ = 150^\circ$-os szöget fordulna, hogy a 4-esről a 9-esre mutasson), így a két mutató 21 óra 20 perckor $150^\circ + 10^\circ = 160^\circ$ -os szöget zár be egymással.

Megjegyzés: a kismutató és a nagymutató természetesen meghatározza a $360^\circ - 160^\circ = 200^\circ$-os szöget is, de ilyen esetekben, ha egyéb utalás nincs (pl. forgásirány), a két lehetőség közül a kisebb szöget szoktuk venni. A válasznál mind a két lehetőséget elfogadjuk. Az indoklásnak sem kell ilyen részletesnek lenni.

A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésedre.
Válaszaidat számolással, szövegesen kellően indokold, a gondolatod menete jól látható legyen!
Használható eszközök: számológép, függvénytáblázat, író- és rajzeszközök
Minden feladat helyes megoldásáért 10 pont jár.

2. A XXI. sz. 2001-gyel kezdődött és 2100-zal végződik.

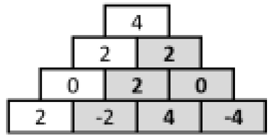
   a) Töltsd ki a táblázat hiányzó celláit egész számokkal úgy, hogy minden felső cella értéke a közvetlen alatta lévő két cella értékének összege legyen!



   b) Hány olyan, 2-vel osztható (páros) évszám van ebben az évszázadban, amelyben pontosan két db 2-es számjegy szerepel (ilyen évszám a 2024 is)?

Megoldás:

   a) Töltsd ki a táblázat hiányzó celláit egész számokkal úgy, hogy minden felső cella értéke a közvetlen alatta lévő két cella értékének összege legyen!



   b) Hány olyan, 2-vel osztható (páros) évszám van ebben az évszázadban, amelyben pontosan két db 2-es számjegy szerepel (ilyen évszám a 2024 is)?

Az $\overline{abcd}$ azt a négyjegyű számot jelenti, aminek az ezresek helyén a, a százasok helyén b, tízesek helyén c és az egyesek helyén d számjegy áll.

A XXI. sz.-ban az ezresek helyén csak a 2-es szám szerepelhet: $\overline{2STE}$

Ebben a században a százasok helyén csak a 0 vagy az 1-es szerepelhet: $\overline{20TE}$ vagy $\overline{21TE}$

Ha az 1-es szerepelne a százasok helyén ($\overline{21TE}$), akkor a tízesek vagy az egyesek helyén az egyik feltétel miatt (pontosan két db 2-es) kellene még egy db 2-es számjegy, de ez az évszám már nem tartozna a XXI. sz.-hoz, így csak 0 lehet a százasok helyén: $\overline{20TE}$

Vizsgáljuk azt, hogy a második 2-es számjegy hol lehet!

Legyen most a tízesek helyén: $\overline{202E}$

Ebben az esetben az egyesek helyén már nem lehet 2-es, és a másik feltétel (páros évszám) miatt az egyesek helyén lehetséges számjegyek: 0; 4; 6; 8. Ez négy lehetséges évszám.

Legyen most az egyesek helyén: $\overline{20T2}$

Ebben az esetben a tízesek helyén a 2-es számjegyet kivéve (pontosan 2 db 2-es) minden számjegy (páratlan is) állhat: 0; 1; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. Ez kilenc lehetséges évszám.

Így összesen $4 + 9 = 13$ db, a feltételeknek megfelelő évszám létezik a $XXI.$ sz.-ban.

Megjegyzés:

- ha a tanuló felsorolja az összes lehetséges évszámot, és a felsorolásnál látható a rendszer, mi szerint számol össze, az is teljes megoldás

A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésedre.
Válaszaidat számolással, szövegesen kellően indokold, a gondolatod menete jól látható legyen!
Használható eszközök: számológép, függvénytáblázat, író- és rajzeszközök
Minden feladat helyes megoldásáért 10 pont jár.

3. Pénzes Peti perselyben gyűjtötte a pénzét. A karácsonyi felbontás után megszámlálta, hogy kétszer annyi 100 Ft-os érméje lett, mint 50 Ft-os, és két és félszer annyi 200 Ft-os érme gyűlt össze, mint 100 Ft-os.

   a) Hány érme volt a perselyben összesen, ha Peti éppen 10000 Ft-ot gyűjtött össze a fenti címletekből?
   b) Az érmék hány %-a volt a legnagyobb címletből?

Megoldás:

a) Hány érme volt a perselyben összesen, ha Peti éppen 10000 Ft-ot gyűjtött össze a fenti címletekből?

Jelöljük az 50 Ft-os érmék számát x-szel!

Foglaljuk táblázatba az adatokat!

	50 Ft-os érmék	100 Ft-os érmék	200 Ft-os érmék
db	x	$2x$	$2,5 \cdot 2x = 5x$
érték címletenként	$50x$	$100 \cdot 2x = 200x$	$200 \cdot 5x = 1000x$

Ha összeadjuk címletenként csoportosítva, akkor kapjuk:

$$50x + 200x + 1000x = 10000$$
$$1250x = 10000$$
$$x = 8$$

Tehát 8 db 50 Ft-os, 16 db 100 Ft-os és 40 db 200 Ft-os, összesen $8 + 16 + 40 = 64$ db pénzérme gyűlt össze Peti perselyében karácsonyra.

Ellenőrzés:

$$50 \cdot 8 + 100 \cdot 16 + 200 \cdot 40 =?\ 10000$$
$$400 + 1600 + 8000 =?\ 10000$$
$$10000 = 10000$$

Ez igaz állítás, így összesen 64 érme volt a perselyben.

b) Az érmék hány %-a volt a legnagyobb címletből?

Felhasználhatjuk az előbb kapott eredményeinket.

Mivel összesen 64 db pénzérme volt, amiből 40 db volt a legnagyobb (200 Ft) címletből, így azt kell kiszámolni, hogy a 40 hány % $-$a a 64-nek.

$$\frac{40}{64} \cdot 100 = 62{,}5\ \%$$

Tehát az érmék 62,5 %-a volt a legnagyobb (200 Ft) címletből.

Válaszolhatunk a kérdésre az érmék darabszámának a kiszámolása nélkül is. Az érmék száma összesen: $1\,rész + 2\,rész + 5\,rész = 8\,rész$, a legnagyobb címlet $5\,rész$. Azt kell kiszámítani, hogy az $5\,rész$ hány %-a a $8\,rész$nek:

$$\frac{5\,rész}{8\,rész} \cdot 100 = \frac{5}{8} \cdot 100 = 62{,}5\%$$

Megjegyzés: a feladatot próbálgatással is meg lehet oldani (véges sok lehetőség, pl. $x = 7;\ 8;\ 9$), de ekkor ügyelni kell arra, hogy megemlítsük a szigorú monotonitást, és jelezni kell azt is, hogy az $x = 8$-on kívül miért nem kapunk más megoldást.

4. Egy szakképző iskola egyik osztályának tanulói közül 20-an voltak téli szünetben sítáborban, 19-en pedig korcsolyatáborban. Az osztályból 9-en voltak olyanok, akik mindkét táborba eljutottak

a) Hányan táboroztak a télen ebből az osztályból?

b) Hány tanulója van ennek az osztálynak, ha a tanulók $\frac{1}{6}$ része egyik táborban sem volt?

c) Hányan voltak olyanok, akik legfeljebb egy táborban vettek részt?

Megoldás:

a) Hányan táboroztak a télen ebből az osztályból?

Vezessük be a következő halmazjelöléseket!

$$O = \{\text{osztály tanulói}\}$$

$$S = \{\text{sítáborosok}\}$$

$$K = \{\text{korcsolyatáborosok}\}$$

$$\Downarrow$$

$$S \cap K = \{\text{mindkét táborban résztvevő tanulók}\}$$

A feltételek alapján az egyes halmazok elemszáma a következő:

$$|S| = 20 \quad |K| = 19 \qquad |S \cap K| = 9$$

Csak sítáborban voltak:

$$|S \setminus K| = |S| - |S \cap K| = 20 - 9 = 11$$

Csak korcsolyatáborban voltak:

$$|K \setminus S| = |K| - |S \cap K| = 19 - 9 = 10$$

Az osztály azon tanulóinak a száma, akik voltak (legalább egy) táborban:

$$|S \cup K| = |S| + |K| - |S \cap K| = 20 + 19 - 9 = 30$$

b) Hány tanulója van ennek az osztálynak, ha a tanulók $\frac{1}{6}$ része egyik táborban sem volt?

Mivel a nem táborozó tanulók az az osztály $\frac{1}{6}$-át teszik ki, így a táborozó tanulók száma az osztály tanulóinak az $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ része.

Így az osztály létszáma: $30 \div \frac{5}{6} = 30 \cdot \frac{6}{5} = 36$

c) Hányan voltak olyanok, akik legfeljebb egy táborban vettek részt?

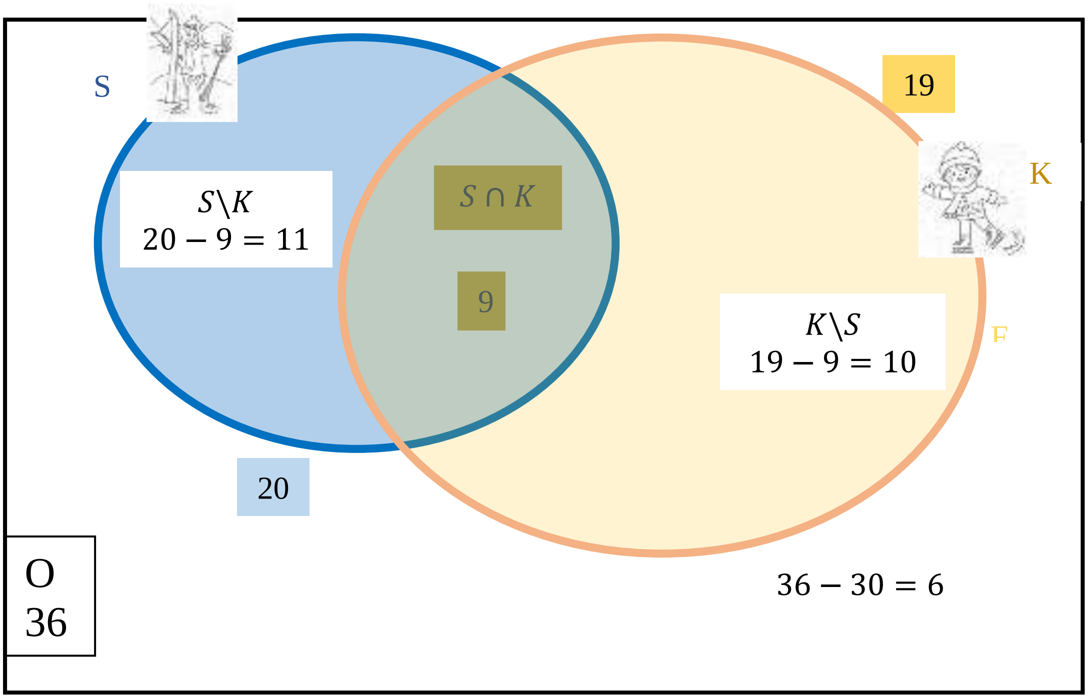
Ezen tanulók számát leggyorsabban úgy kaphatjuk meg, ha az osztály létszámából kivonjuk azok számát, akik mindkét táborban voltak: $36-9=27$

Kicsit hosszadalmasabb, de ugyanazt az eredményt adja, ha a csak síelők számához (11) hozzáadjuk a csak korcsolyázók számát (10), és azokét, akik egyik táborban sem voltak $(36-30=6)$.

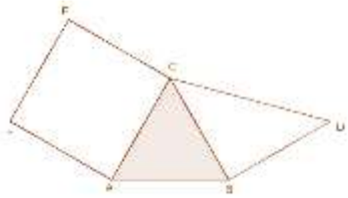
Kapjuk: $11+10+6=27$

Megjegyzés:

Természetesen segít (nem kötelező) a megoldásnál egy halmazábra (Venn-diagram) elkészítése is. Nem szükséges precíz halmazelméleti jelölésekkel, szabályokkal indokolni a kapott eredményeket, de látni kell a gondolat menetét és az egyszerű számolásokat, rövid indoklásokat.



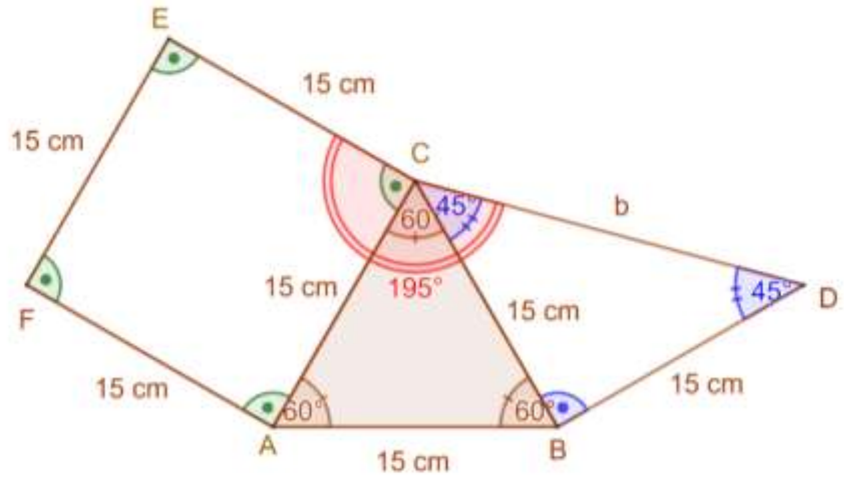
5. Az ABC egyenlő oldalú (szabályos) háromszögre az ábra szerint az $AC = 15$ cm hosszú oldalára kifelé egy $ACEF$ négyzetet, a BC oldalára pedig szintén kifelé egy DCB egyenlő szárú derékszögű háromszöget rajzolunk úgy, hogy a derékszögű csúcs a B csúcsra essen. Így az $ABDCEF$ hatszög alakzatot kapjuk.



   a) Készíts vázlatot a lényeges adatok feltüntetésével!
   b) Számítsd ki a keletkezett hatszög alakzat legnagyobb belső szögét!
   c) Mekkora az így kapott hatszög kerületének pontos értéke?

Megoldás:

   a) Készíts vázlatot a lényeges adatok feltüntetésével!



Az ABC egyenlő oldalú (szabályos) háromszög minden oldala 15 cm hosszú: $AB = BC = CA = 15$ cm

Az ABC egyenlő oldalú (szabályos) háromszög minden szöge egyenlő, a háromszög belső szögeinek összegét $(= 180^{\circ})$ felhasználva 60°.

Az $ACEF$ négyzet minden oldala a konstrukcióból és a négyzet tulajdonságából következően 15 cm hosszú: $AC = CE = EF = FA = 15$ cm

Az $ACEF$ négyzet minden szöge 90°-os.

A DCB egyenlő szárú derékszögű háromszög mindkét hegyesszöge 45°-os a két egyenlő oldal és a belső szögek összege $(= 180^{\circ})$ miatt.

A konstrukcióból adódik, hogy a DCB egyenlő szárú derékszögű háromszög mindkét befogója 15 cm: $BC = BD = 15$ cm

b) Számítsd ki a keletkezett hatszög alakzat legnagyobb belső szögét!

Felhasználva az $ABDCEF$ hatszög konstrukcióját, és az őt alkotó alakzatok belső szögeinek nagyságát (lásd feljebb), megállapíthatjuk, hogy az $ABDCEF$ hatszög legnagyobb belső szöge az ECD szög lesz:

$$ECD\measuredangle = ECA\measuredangle + ACB\measuredangle + BCD\measuredangle = 90^{\circ} + 60^{\circ} + 45^{\circ} = 195^{\circ}$$

c) Mekkora az így kapott hatszög kerületének pontos értéke?

A keletkezett $ABDCEF$ hatszögnek a konstrukció és az a) -ban leírtak okán öt olyan oldala van, amelyek egyenlőek:

$$AB = BD = CE = EF = FA = 15 \text{ cm}$$

A kerülethez szükséges még kiszámolni a $DC = b$ oldal pontos értékét.

Mivel a DCB (egyenlő szárú) derékszögű háromszög, így Pitagorasz tétel alapján:

$$15^2 + 15^2 = b^2$$

$$225 + 225 = b^2$$

$$450 = b^2$$

$$b = \sqrt{450} \qquad (b > 0 \text{ miatt}),$$

így a kerület pontos értéke: $k_{ABDCEF} = 5 \cdot 15 + \sqrt{450} = 75 + \sqrt{450}$=75+15$\sqrt{2}$ cm,

kerekítve: $k_{ABDCEF} \approx 96{,}2$ cm

Megjegyzések:

- Természetesen nem szükséges az a) vázlatpontnál a részletes indoklás. Az indoklások elfogadhatók akkor is, ha azok a későbbi számolásoknál jelennek meg. Ez jól látható az adható pontoknál.

- Nem elvárás a c) pontban a kerület pontos értékénél a négyzetgyökjel alóli kihozatal.