Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LIII. esztendő

2014-2015. tanév

11. évfolyam

I. forduló

1. Az a, b, c, x, y, z pozitív egészekre $a^2+b^2=c^2$ és $x^2+y^2=z^2$. Bizonyítsuk be, hogy

$$(a+x)^2+(b+y)^2 \le (c+z)^2.$$

Mikor teljesül egyenlőség?

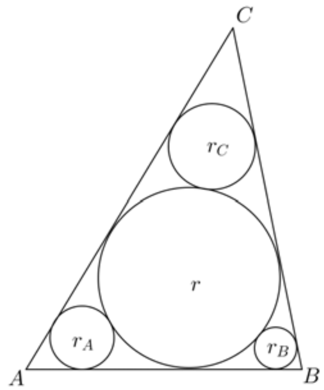
2. Tudjuk, hogy egy négyszög három belső szögfelezője egy pontban metszik egymást. Mutassuk meg, hogy a negyedik belső szögfelező is illeszkedik a másik három metszéspontjára.

3. Legyen $n \ge 2$, és jelölje $P(n)$ az n összes pozitív osztójának szorzatát. Melyik az a legkisebb n, amelyre $P(n)=n^{10}$?

4. Határozzuk meg az $f:(\mathbf{R}-\{2\}) \to \mathbf{R}$ függvényt, ha tudjuk, hogy az értelmezési tartomány minden x elemére

$$2f(x)+3f\left(\frac{2x+29}{x-2}\right)=100x+80.$$

5. Az ABC háromszög beírt körének sugara r, a csúcsokhoz az ábrán látható módon írt körök sugara pedig rendre r_A, r_B, r_C. Igazoljuk, hogy $r \le r_A+r_B+r_C$.



6. Egy 2015 oldalú konvex sokszög csúcsait kiszínezzük úgy, hogy bármely két szomszédos csúcs színe különböző. Bizonyítsuk be, hogy a sokszög egymást nem metsző átlókkal háromszögekre bontható úgy, hogy minden egyes „vágó átló” végpontjai különböző színűek.