Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LIII. Esztendő

2014-2015. tanév

11. évfolyam

II. forduló

1. Adjuk meg mindazokat a rendezett valós (x; y) számpárokat, amelyek kielégítik az alábbi egyenletet.

$$\left(4x^2+6x+4\right)\left(4y^2-12y+25\right)=28$$

2. Legyen $N_k = 131313...131$ a tízes számrendszerben ($2k$ + 1)-jegyű szám, amelyben (k + 1) darab 1-es számjegy és k darab 3-as számjegy váltakozik. Mutassuk meg, hogy N_k egyetlen pozitív egész k-ra sem osztható 31-gyel.

3. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan pozitív egészekből álló rendezett (a; b; c) számhármas létezik, amelyekre teljesül, hogy
(1) a, b és c legnagyobb közös osztója 1;
(2) $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ egy egész szám négyzete.

4. Az ABC háromszögben $AB=52$, $BC=64$, $CA=70$. P az AB, Q a CA oldal pontja úgy, hogy az APQ háromszögnek és a $PBCQ$ négyszögnek a területe is, kerülete is megegyezik. Milyen hosszú a PQ szakasz?

5. Mely pozitív egész n esetén bontható fel az $\{1; 2; ...; n\}$ halmaz öt darab, páronként idegen halmaz uniójára úgy, hogy az egyes halmazokban levő elemek összege megegyezzen?

6. Az ABC háromszög AB oldalának felezőpontja F, BC oldalának harmadoló pontjai H_1 és H_2, CA oldalának negyedelő pontjai N_1, N_2 és N_3. A háromszög csúcsaiból és a felsorolt osztópontokból álló ponthalmaz bármely két (még össze nem kötött) pontját kössük össze egy szakasszal. Az összekötő szakaszoknak a háromszög belsejébe eső metszéspontjai között hány olyan van, amelyekre legalább három szakasz illeszkedik?