Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LIII. esztendő

2014-2015. tanév

12. évfolyam

I. forduló

1. Igazoljuk, hogy ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$, akkor

$$\frac{1}{\sin^6 x} + \frac{1}{\cos^6 x} + \frac{1}{\sin^6 x \cdot \cos^6 x} \geq 80 .$$

2. Az ABC háromszög BC és CA oldalát tíz egyenlő részre osztottuk. Az egymásnak megfelelő osztópontokat összekötve az eredeti háromszöget az AB oldallal párhuzamos szakaszokkal tíz részre osztottuk. Mekkora az ABC háromszög területe, ha a legnagyobb rész területe 76?

3. Melyik az a legkisebb n pozitív egész szám, amelyre teljesülnek a következők:
(1) $n = a + b + c$, ahol a, b, c páronként különböző pozitív egészek;
(2) $a + b$, $b + c$, $c + a$ mindegyike négyzetszám (pozitív egész szám négyzete)?

4. Az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ nem konstans függvényre teljesül, hogy bármely valós x esetén

$$f(x+1) + f(x-1) = \sqrt{3} \cdot f(x).$$

Bizonyítsuk be, hogy f periodikus függvény.

5. Egy tetraéder lapjainak területei t_1, t_2, t_3, t_4, a megfelelő lapokhoz tartozó testmagasságok rendre m_1, m_2, m_3, m_4, a tetraéder térfogata pedig V. Mutassuk meg, hogy

$$(t_1 + t_2 + t_3 + t_4) \cdot (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) \geq 48V .$$

6. S a sík egy 30 pontból álló halmaza, amelyre teljesül, hogy bármely két pontjának távolsága legalább 1. T az S olyan legbővebb részhalmaza (ha több ilyen van, akkor az egyik), amelyre teljesül, hogy bármely két pontjának távolsága legalább $\sqrt{3}$. Igazoljuk, hogy $4 \leq |T| \leq 6$.