Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LIII. esztendő

2014-2015. tanév

12. évfolyam

II. forduló

1. Tudjuk, hogy $\frac{\cos 3x}{\cos x}=\frac{1}{3}$ ($x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$). Számítsuk ki a $\frac{\sin 3x}{\sin x}$ értékét.

2. Meg lehet-e számozni egy szabályos dodekaéder csúcsait az első 20 pozitív egész szám mindegyikének egyszeri felhasználásával úgy, hogy a lapok csúcsaiba írt öt szám összege mindegyik lapra ugyanannyi legyen?

3. Egy háromszög *a*, *b*, *c* oldalhosszai pozitív egész számok. Tudjuk, hogy $b<a$, és a *c* hosszúságú oldallal szemközti szög 60°-os. Bizonyítsuk be, hogy *a* összetett szám.

4. A derékszögű koordináta-rendszerben az *ABCD* négyzet *AB* oldalára a *P*(31;27), *BC* oldalára a *Q*(42; 43), *CD* oldalára az *R*(60; 27), *DA* oldalára az *S*(46; 16) pont illeszkedik. Számítsuk ki az *ABCD* négyzet területét.

5. Mely *d* pozitív egész számok esetén lehet az egész számokat kiszínezni pirosra és kékre úgy, hogy ne legyen két piros pont egymástól *d* távolságra, és ne legyen két kék pont egymástól 1 távolságra?

6. Határozzuk meg azt a legnagyobb pozitív egész *n* számot, amelyhez egy és csak egy olyan pozitív egész *m* szám létezik, amelyre $m<n^2$ és $\sqrt{n+\sqrt{m}}+\sqrt{n-\sqrt{m}}$ pozitív egész szám.