Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LIV. esztendő

2015-2016. tanév

11. évfolyam

I. forduló

1. Oldjuk meg a valós számok lehető legbővebb részhalmazán a következő egyenletet.

$$x^2-4x-4+x\cdot\sqrt{x^2-2x-2}=0$$

2. Az ABC háromszögre – a szokásos jelöléseket használva – teljesül az $a\cdot\cos\alpha=b\cdot\cos\beta$ összefüggés. Mit mondhatunk a háromszögről? (A választ indokolni kell.)

3. Hány pozitív egész számokból álló (x; y) rendezett számpár megoldása van az

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2016}$$

egyenletnek?

4. Az $ABCD$ négyzet BC oldalának tetszőleges belső pontja P. Az ABP háromszög körülírt köre a Q pontban, a PCQ háromszög körülírt köre pedig az R pontban metszi a BD átlót. Mutassuk meg, hogy az A, R és P pontok egy egyenesre illeszkednek.

5. Egy háromszög oldalainak hossza a, b, c, megfelelő magasságainak hossza m_a, m_b, m_c, területe pedig T. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{b^2+c^2}{a}\cdot m_a+\frac{c^2+a^2}{b}\cdot m_b+\frac{a^2+b^2}{c}\cdot m_c\geq 12T\ .$$

Mikor teljesül egyenlőség?

6. Adott a síkon n pont ($n\geq 3$) úgy, hogy közülük semelyik három nem illeszkedik egy egyenesre. Az adott pontok közül bizonyosak szakaszokkal vannak összekötve úgy, hogy bármely két ponthoz van olyan harmadik pont, amelyet mindkét ponttal szakasz köt össze. Legalább hány szakasz szükséges ahhoz, hogy a feltétel teljesüljön?