Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LV. esztendő

2016-2017. tanév

10. évfolyam

I. forduló

1. Melyek azok a tízes számrendszerben négyjegyű $\overline{abcd}$ pozitív egész számok, amelyekre teljesülnek a következő oszthatósági feltételek?
(1) a osztója az $\overline{ab}$ kétjegyű számnak;
(2) az $\overline{ab}$ kétjegyű szám osztója az $\overline{abc}$ háromjegyű számnak;
(3) az $\overline{abc}$ háromjegyű szám osztója az $\overline{abcd}$ négyjegyű számnak.

2. Az a, b, c 0-tól különböző valós számokra $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$. Bizonyítsuk be, hogy a három szám közül valamelyik kettő egymás ellentettje.

3. Az ABC háromszög AB, illetve AC oldalának A-hoz közelebbi harmadoló pontjai H, illetve G. A B-ből, illetve C-ből induló belső szögfelezők a HG egyenest P-ben, illetve Q-ban metszik. Igazoljuk, hogy

$$\frac{HG+PQ}{AB+AC}=\frac{2}{3}.$$

4. Adott a t pozitív valós szám. Tekintsük az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=p^2\cdot\left(x^2+2x\right)+p^2-1$ másodfokú függvényeket, ahol p pozitív valós paraméter. Mely p érték esetén lesz az f grafikonjának tengelypontja, valamint az x tengellyel vett metszéspontjai által meghatározott háromszög területe t?

5. Az $ABCD$ négyzet tetszőleges belső pontja P. A P pont A körüli +90°-os elforgatottja E, B körüli −90°-os elforgatottja F. Mutassuk meg, hogy az EF egyenes felezi a négyzet területét.

6. Adott egy téglalap, két szomszédos oldala 11 illetve 13 egység hosszú. Fedjük le ezt a téglalapot egyrétűen és hézagmentesen egész oldalhosszúságú (nem feltétlenül egybevágó) négyzetekkel. Határozzuk meg a lefedéshez szükséges négyzetek számának minimumát, és adjunk meg egy minimális számú négyzetet használó lefedést.