Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LV. esztendő

2016-2017. tanév

10. évfolyam

Döntő

1. Az $(x-a)\cdot(x-a-b)=1$ egyenletben a és b adott paraméterek. Igazoljuk, hogy az egyenletnek két valós gyöke van, és az egyik kisebb, mint a, a másik pedig nagyobb, mint a.

2. Az ABC háromszög belsejében adott P ponton keresztül párhuzamosokat húztunk a háromszög oldalaival. Ezek a párhuzamosok három háromszögre és három négyszögre osztják fel a háromszöget. Tudjuk, hogy a három háromszög területe rendre 4, 9 és 49. Mekkora az ABC háromszög területe?

3. Határozzuk meg a p prímszám értékét, ha tudjuk, hogy az $x^2-px-580p=0$ egyenletnek két (különböző) egész megoldása van.

4. Az $ABCD$ húrtrapéz köré írt kör O középpontja az AB alap felezőpontja. A trapéz átlóinak metszéspontja M. P a trapéz síkjának olyan pontja, amelyre az $AOMP$ négyszög paralelogramma. Mutassuk meg, hogy $AP=PD$.

5. Bizonyítsuk be, hogy bármely a, b, c páronként különböző valós számokra fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\frac{\left(a^2-b^2\right)^3+\left(b^2-c^2\right)^3+\left(c^2-a^2\right)^3}{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3}>8abc\,.$$

6. Aladár, Béla és Csaba egy szabályos háromszög csúcsaiban állnak, és egy kosárlabdát dobálnak egymásnak. A passzolgatás során mindig a labdát aktuálisan birtokló fiú dönti el, hogy kinek dobja a labdát. Az első dobást Aladár végzi el. Hány olyan 8 dobásból álló dobássorozat van, amelynek végén (8 dobás után) Aladárnál van a labda?