Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LV. esztendő

2016-2017. tanév

11. évfolyam

Döntő

1. Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok lehető legbővebb részhalmazán.

$$\log_y x + \log_x y = \frac{5}{2}$$
$$x + y = 12$$

2. Az ABC háromszög BC oldalának D és AC oldalának E pontjára teljesülnek a következők: $\frac{BD}{DC} = \frac{2}{3}$ és $\frac{AE}{EC} = \frac{3}{4}$. Határozzuk meg az $\frac{AM}{MD} \cdot \frac{BM}{ME}$ értékét, ahol M az AD és BE szakaszok metszéspontja.

3. Tudjuk, hogy 2017 darab egymást követő pozitív egész szám összege teljes négyzet (egy pozitív egész szám második hatványa). Határozzuk meg a 2017 darab szám legnagyobbikának a minimumát.

4. Határozzuk meg az $f :]-\infty; 2[\to \mathbf{R},\ f(x) = \frac{5 - 4x + x^2}{2 - x}$ függvény minimumát.

5. Az $ABCD$ konvex négyszögben $ABC\angle = CDA\angle$. E az AC, F a CD, G a DA, H pedig a BD szakasz felezőpontja. Bizonyítsuk be, hogy
a) az $EFGH$ négyszög húrnégyszög;
b) $AEH\angle = BCA\angle - ACD\angle$.

6. Az $A_1A_2...A_{100}$ 100 oldalú szabályos sokszögben behúzzuk az összes A_iA_{i+9} átlót ($i = 1, 2, ..., 100$ és $A_{i+100} = A_i$ bármely $1 \le i \le 9$ esetén). Hány metszéspontot határoz meg a sokszög belsejében ez a 100 darab átló?