Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LV. esztendő

2016-2017. tanév

9. évfolyam

Döntő

1. Tudjuk, hogy $xy = a$, $xz = b$, $yz = c$ és $abc \neq 0$. Fejezzük ki *a*, *b* és *c* segítségével az $x^2 + y^2 + z^2$ összeget.

2. Az *ABC* egyenlő szárú háromszögben $AB = AC = 2$. A háromszög *BC* alapján felvettük a $P_1, P_2, ..., P_{2017}$ pontokat (2017 darab pont). Legyen $m_i = AP_i^2 + BP_i \cdot P_iC$ ($i = 1; 2; ...; 2017$). Határozzuk meg az $m_1 + m_2 + ... + m_{2017}$ összeget.

3. Bizonyítsuk be, hogy a tízes számrendszerben legalább kétjegyű pozitív egész számok között nincs olyan négyzetszám (egy pozitív egész szám második hatványa), amely azonos számjegyekből áll.

4. Az *ABC* szabályos háromszög *AC* oldalának *D* és *AB* oldalának *E* pontjára teljesül, hogy ha *P* a *BD* és *CE* egyenesek metszéspontja, akkor az *AEPD* négyszög területe egyenlő a *BPC* háromszög területével. Mekkora a *BPE* szög?

5. Az 1-nél nagyobb *a* valós számra és az 1-nél nagyobb *n* pozitív egész számra teljesül, hogy az $[ax] = x$ egyenletnek pontosan *n* darab valós gyöke van. Milyen értékeket vehet fel *a*? ($[z]$ jelöli a *z* szám (alsó) egészrészét, azaz a *z*-nél nem nagyobb legnagyobb egész számot.)

6. Egy matematikaversenyen hat feladatot tűztek ki, 1-től 6-ig sorszámozták őket. Mindegyik feladat megoldását 0-tól 10-ig terjedő, egész számokból álló skálán pontozta a versenybizottság. Dolgozata eredményét látva Marci észrevette, hogy egyik megoldására sem kapott több pontot, mint az adott feladatot megelőző feladatok megoldására kapott pontszámok bármelyike. Hányféleképpen alakulhatott Marci dolgozatának pontozása?