Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LVI. esztendő

2017-2018. tanév

11. évfolyam

II. forduló

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$\left|x^2-1\right|+\left|x^2-4\right|=p\cdot x$$

egyenletet, ahol p valós paraméter.

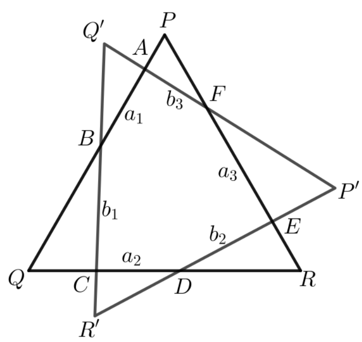
2. Az ABC háromszög oldalai a, b, c, szögei α, β, γ a szokásos jelölésnek megfelelően. Tudjuk, hogy $b=2$ (egység), $\alpha=45°$ és a háromszög területe 2 (területegység). Határozzuk meg az $\dfrac{a+b+c}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}$ kifejezés értékét.

3. Mutassuk meg, hogy ha a, b, c pozitív valós számok, akkor

$$25<\left(1+\frac{4a}{b+c}\right)\cdot\left(1+\frac{4b}{c+a}\right)\cdot\left(1+\frac{4c}{a+b}\right).$$

4. Az x, y, z pozitív egész számokra $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}<1$. Határozzuk meg az $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$ kifejezés maximumát.

5. Az ábrán látható *PQR* és *P'Q'R'* háromszögek szabályosak és egybevágók. Az *ABCDEF* hatszög oldalainak hosszát az ábrának megfelelően rendre $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ jelöli. Bizonyítsuk be, hogy $a_1^2+a_2^2+a_3^2=b_1^2+b_2^2+b_3^2$.



6. Tizenhét darab pozitív egész számról tudjuk, hogy a tízes számrendszerbeli alakjukban az utolsó (egyes helyi értéken álló) számjegyük a $\{0;1;2;3;4\}$ halmaz valamelyik eleme. Igaz-e, hogy mindig kiválasztható közülük öt szám úgy, hogy összegük 5-tel osztható legyen? (A választ indokolni kell.)