

# Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LVI. esztendő

2017-2018. tanév

12. évfolyam

Döntő

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet.

$$(3^x - 9)^3 + (9^x - 81)^3 = (9^x + 3^x - 90)^3$$

2. Adott egy  $2a$  oldalhosszúságú szabályos háromszög. A háromszög síkjában mi azon  $P$  pontok halmaza, amelyekre nézve teljesül, hogy a háromszög csúcsaitól vett távolságaik négyzetének összege egy adott  $s$  pozitív valós számmal egyenlő?

3. Egy szabályos háromszög alapú egyenes hasábról tudjuk, hogy van beírható (a hasáb minden lapját érintő) gömbje. A hasáb felszínét jelölje  $A$ . Fejezzük ki  $A$ -val a gömb felszínét.

4. Tudjuk, hogy az

$$\frac{1}{8} \cdot (2a - a^2) \leq x^2 - 3x + 2 \leq 3 - a^2$$

egyenlőtlenség minden nem negatív és 2-nél nem nagyobb valós  $x$ -re teljesül. Határozzuk meg az  $a$  paraméter lehetséges értékeit.

5. Bizonyítsuk be, hogy  $(\operatorname{tg} 15^\circ)^n + (\operatorname{ctg} 15^\circ)^n$  bármely pozitív egész  $n$  esetén páros pozitív egész szám.

6. Az  $n$  pozitív egész szám tízes számrendszerbeli alakjában  $a_1$  darab 1-es,  $a_2$  darab 2-es,  $a_3$  darab 3-as, ...,  $a_9$  darab 9-es számjegy található. Igazoljuk, hogy

$$2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 4^{a_3} \cdot \dots \cdot 9^{a_8} \cdot 10^{a_9} \leq n + 1.$$