Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny L. esztendő

2011-2012. tanév

10. évfolyam

II. forduló

1. Felbontható-e a $H=\{1;2;...;15\}$ halmaz egy kételemű A és egy tizenhárom elemű B halmazra ($A\cap B=\emptyset$, $A\cup B=H$) úgy, hogy A elemeinek szorzata egyenlő B elemeinek összegével?

2. Az *ABC* háromszög belső szögfelezőinek háromszögbe eső szakaszai rendre *AD*, *BE*, *CF*. Bizonyítsuk be, hogy ha $a=BC$, $b=CA$, $c=AB$, a *DEF* háromszög területe T', az *ABC* háromszög területe pedig *T*, akkor

$$\frac{T'}{T}=\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

3. Mutassuk meg, hogy ha $x+y>0$ és $x^2+y^2+\frac{2xy}{x+y}=1$, akkor $x+y=1$.

4. Az *ABC* szabályos háromszög *P* belső pontjára teljesül, hogy az *APC* szög 150°-os. Igazoljuk, hogy az *AP*, *BP*, *CP* szakaszok egy derékszögű háromszög oldalai.

5. Az *a* és *b* különböző pozitív egész számokra teljesül, hogy az

$$(a-1)x^2-(a^2+2)x+(a^2+2a)=0$$

és

$$(b-1)x^2-(b^2+2)x+(b^2+2b)=0$$

másodfokú egyenleteknek van közös valós gyöke. Számítsuk ki az $\frac{a^b+b^a}{a^{-b}+b^{-a}}$ kifejezés értékét.

6. Az első száz pozitív egész szám közül tekintsük a 3-mal osztva 1 maradékot adókat, jelölje ezek halmazát *A*. Bizonyítsuk be, hogy *A* bármely húszelemű részhalmazában van két olyan elem, amelyek összege 104.