Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny L. esztendő

2011-2012. tanév

11. évfolyam

Döntő

1. Határozzuk meg a p paraméter összes olyan valós értékét, amelyre az

$$\left(x^2-2px-4\left(p^2+1\right)\right)\cdot\left(x^2-4x-2p\left(p^2+1\right)\right)=0$$

egyenletnek három, páronként különböző valós gyöke van.

2. Tekintsük azokat a háromszögeket, amelyekben két magasság hossza előre adott állandó. Ezek közül a háromszögek közül melyiknek minimális a területe?

3. Melyek azok az n pozitív egész számok, amelyekre $n\cdot 2^n+1$ osztható 3-mal?

4. Az O középpontú egységsugarú körbe írt $ABCD$ négyszög AC és BD átlói merőlegesek egymásra.

a) Számítsuk ki a négyszög oldalai négyzetének összegét.

b) Számítsuk ki az $ABCD$ négyszög területét, ha tudjuk, hogy érintőnégyszög, és a beírt kör K középpontjának O-tól vett távolsága $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

5. Egy szabályos dobókockát n-szer feldobunk.

a) Mi a valószínűsége annak, hogy az n dobás közül pontosan az egyik 6-os?

b) Az előző pontban kiszámolt valószínűség mely n érték esetén maximális, és mennyi ez a maximum?

6. Egy egyenesen felvett $A_1, A_2, ..., A_n$ $(n\geq 3)$ pontokra $A_1A_2=A_2A_3=...=A_{n-1}A_n$. A pontokat két színnel színezzük, és érvényes a következő állítás: Bármely színezés esetén van olyan i és j $(1\leq i<j<2j-i\leq n)$, amelyre A_i, A_j és A_{2j-i} azonos színűek. Legalább mekkora az n?