Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny L. esztendő

2011-2012. tanév

12. évfolyam

I. forduló

1. Az a valós paraméter mely értékeire teljesül bármely valós x esetén az

$$|2x-a|+|3x-2a| \geq a^2$$

egyenlőtlenség?

2. Az ABC háromszög belső szögeinek nagysága a szokásos jelölésnek megfelelően α, β, γ. Tudjuk, hogy α : β : γ = 1 : 2 : 4. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{1}{BC}.$$

3. A $H=\{1;\,2;\,...;\,100\}$ halmaz A és B részhalmaza rendelkezik a következő tulajdonságokkal:
(1) $|A|=|B|$;
(2) $A\cap B=\varnothing$;
(3) Ha $n\in A$, akkor $2n+2\in B$.
Határozzuk meg az $|A\cup B|$ maximumát.

4. Négy darab egységnyi sugarú gömb mindegyike érinti a többi hármat. A gömbök köré szabályos tetraédert írunk úgy, hogy a tetraéder mindegyik lapja pontosan három gömböt érint, és mindegyik gömbfelületnek a tetraéder három lapjával van közös pontja. Számítsuk ki a tetraéder élének hosszát.

5. Az $\{a_n\}$ számtani sorozat differenciája d, a $\{b_n\}$ mértani sorozat hányadosa q, és q 1-nél kisebb pozitív racionális szám. Számítsuk ki a q értékét, ha tudjuk, hogy $a_1=d$, $b_1=d^2$ és $\dfrac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{b_1+b_2+b_3}$ pozitív egész szám.

6. Egy kisváros három általános iskolájának mindegyikébe pontosan n tanuló jár. Az összesen $3n$ tanuló mindegyike pontosan $n+1$ más iskolába járó diákot ismer. (Az ismeretség kölcsönös.) Mutassuk meg, hogy mindhárom iskolából kiválasztható egy-egy tanuló úgy, hogy a kiválasztott három tanuló mindegyike ismeri a másik kettőt.