Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny L. esztendő

2011-2012. tanév

12. évfolyam

Döntő

1. Mely pozitív valós *a* számok esetén teljesül az

$$a^{\cos 2x} + a^{2\sin^2 x} \le 2$$

egyenlőtlenség bármely valós *x*-re?

2. Az *ABCD* húrnégyszög köré írt körének *A*-ra és *C*-re illeszkedő érintői a *P* pontban metszik egymást úgy, hogy *P* nincs rajta a *BD* egyenesen, és $PA^2 = PD \cdot PB$. Bizonyítsuk be, hogy az *ABCD* négyszög átlói az *AC* átló felezőpontjában metszik egymást.

3. Egy *R* sugarú gömb teljes felületét és egy *R* alapkör sugarú, 2*R* magasságú egyenes henger palástját ugyanolyan *d* vastagságban befestjük ugyanazzal a festékkel. Melyik test esetén van szükségünk több festékre?

4. A sakktábla sötét mezőinek középpontjait jelölje $A_1, A_2, ..., A_{32}$, világos mezőinek középpontjait pedig $B_1, B_2, ..., B_{32}$. Bizonyítsuk be, hogy a tábla bármely *P* pontjára teljesül a következő:

$$A_1P^2 + A_2P^2 + ... + A_{32}P^2 = B_1P^2 + B_2P^2 + ... + B_{32}P^2 .$$

5. Melyik az a legkisebb pozitív egész *n*, amelyre teljesül, hogy pozitív osztóinak (1-et és *n*-t is beleértve) négyzetösszege $(n+3)^2$?

6. Legyen *A* egy *k* elemű részhalmaza az $\{1; 2; 3; ...; 16\}$ halmaznak. Tudjuk, hogy *A* bármely két részhalmazában különböző az elemek összege, és ha *B* egy *A*-t tartalmazó $k+1$ elemű részhalmaza az $\{1; 2; 3; ...; 16\}$ halmaznak, akkor van *B*-nek legalább két olyan részhalmaza, amelyekre ugyanannyi az elemek összege.

a) Mutassuk meg, hogy $k \le 5$.

b) Határozzuk meg *A* elemei összegének minimumát és maximumát.