Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny L. esztendő

2011-2012. tanév

9. évfolyam

Döntő

1. Számítsuk ki az $a^2 - b^2 + c^2$ kifejezés értékét, ha tudjuk, hogy $a - 7b + 8c = 4$ és $8a + 4b - c = 7$.

2. Az *ABC* derékszögű háromszög derékszögű csúcsa *C*, $AC = 16$, $BC = 12$. *D* a *BC*, *E* az *AC*, *F* pedig az *AB* oldal pontja úgy, hogy $BD = 3$, $CE = 4$ és $AF = 5$. Hányad része a *DEF* háromszög területe az *ABC* háromszög területének?

3. A valós számok halmazán értelmezett *f* lineáris függvényre $f(0) = -5$ és $f(-5) = -15$. Mely *m* valós számokra teljesül, hogy az $f(x) \cdot f(m - x) > 0$ egyenlőtlenség megoldásainak halmaza egy 2 hosszúságú intervallum?

4. Igazoljuk, hogy bármely háromszögre érvényes a következő állítás: A háromszög beírt körének középpontjára illeszkedő egyenes akkor és csak akkor felezi a háromszög területét, ha a kerületét is felezi.

5. Az *m* és *n* pozitív egész számok, és $A = \dfrac{(m+3)^n + 1}{3m}$. Tudjuk, hogy *A* egész szám. Bizonyítsuk be, hogy *A* páratlan egész szám.

6. Egy dobozban 2012 darab fehér golyó van. Van még ezen kívül elegendően sok fehér, zöld és piros golyónk a dobozon kívül. A dobozban levő golyókkal a következőket tehetjük:
(1) 2 fehér golyót kicserélünk 1 zöld golyóra;
(2) 2 piros golyót kicserélünk 1 zöld golyóra;
(3) 2 zöld golyót kicserélünk 1 fehér és 1 piros golyóra;
(4) 1 fehér és 1 zöld golyót kicserélünk 1 piros golyóra;
(5) 1 zöld és 1 piros golyót kicserélünk 1 fehér golyóra.
A fenti kicserélési lehetőségek véges sokszori alkalmazásával elérhető, hogy a dobozban 3 darab golyó maradjon. Mutassuk meg, hogy a dobozban maradó 3 golyó közül legalább az egyik zöld.