Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LI. esztendő

2012-2013. tanév

10. évfolyam

I. forduló

1. Bizonyítsuk be, hogy ha $(a+b+c)\cdot(ab+bc+ca)=abc$, akkor $(a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a)=0$.

2. Az O_1 középpontú, $r_1=3$ sugarú k_1 és az O_2 középpontú, $r_2=8$ sugarú k_2 körnek nincs közös pontja. Az egyik közös belső érintőjük a k_1 kört E_1-ben, a k_2 kört E_2-ben érinti. Az O_1O_2 és E_1E_2 szakaszok metszéspontja *M*. Mekkora E_1E_2, ha $O_1M=5$?

3. Mely pozitív egész *n* esetén osztható 7-tel az $5^{3n}+5^{2n}+5^n+1$ kifejezés értéke?

4. Az *ABC* hegyesszögű háromszög *A*, *B* és *C* csúcsaiból induló súlyvonalak egyenesei a háromszög köré írt kört rendre az A_1, B_1 és C_1 pontokban metszik. Ezeket sorra tükrözve a hozzájuk tartozó oldalegyenesekre, rendre az A_0, B_0, C_0 pontokat kapjuk. Igazoljuk, hogy A_0, B_0, C_0 és az *ABC* háromszög magasságpontja húrnégyszöget határoz meg.

5. Adott 11 darab páronként különböző egész szám, amelyek egyikének sincs 30-nál nagyobb prímosztója. Mutassuk meg, hogy közülük kiválasztható néhány (esetleg csak egy, esetleg az összes) úgy, hogy a kiválasztott számok szorzata négyzetszám.

6. Egy kapcsolótábla 49 világító gombból áll. A gombok 7 sorban és 7 oszlopban helyezkednek el. Egy gomb megnyomásakor ez a gomb, valamint vízszintes, függőleges és átlós szomszédjai egyszerre váltanak: az addig világítóak kialszanak, a korábban kikapcsoltak meggyulladnak. Igazoljuk, hogy véges sok gombnyomással akármilyen helyzetből kiindulva ki lehet kapcsolni az összes gombot.