Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LI. esztendő

2012-2013. tanév

11. évfolyam

I. forduló

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget.

$$\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-2}\geq 2$$

2. Az *ABC* egyenlő szárú derékszögű háromszög *AC* átfogóján úgy vettük fel az *M* és *K* pontokat, hogy *K* az *M* és *C* közé esik és az *MBK* szög 45º-os. Bizonyítsuk be, hogy

$$MK^2 = AM^2 + KC^2 .$$

3. Határozzuk meg a 2013 darab 9-es számjegyből álló tízes számrendszerbeli szám harmadik hatványában a számjegyek összegét.

4. Tekintsük az *ABC* háromszög beírt és *AB* oldalához hozzáírt körét. Igazoljuk, hogy e két kör sugarának mértani közepe nem lehet nagyobb, mint az *AB* oldal fele.

5. Adott a síkon *n* darab pont ($n\geq 4$) úgy, hogy semelyik három nem illeszkedik egy egyenesre, és semelyik négy nem illeszkedik egy körre. Bármely három ponthoz megrajzoljuk a rájuk illeszkedő kört. Mutassuk meg, hogy az így kapott körök között legfeljebb $\frac{n\cdot(n-1)}{3}$ darab egységnyi sugarú lesz.

6. Egy kapcsolótábla 100 világító gombból áll. A gombok 10 sorban és 10 oszlopban helyezkednek el. Egy gomb megnyomásakor a vele egy sorban illetve egy oszlopban levő gombok egyszerre váltanak: az addig világítóak kialszanak, a korábban kikapcsoltak meggyulladnak. Legalább hány gombot kell megnyomni ahhoz, hogy az összes gomb kialudjék, ha eredetileg mind világított?