Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LI. esztendő

2012-2013. tanév

11. évfolyam

II. forduló

1. Tekintsük az $|x-a|+15=6\cdot|x+2|$ egyenletet, ahol a valós paraméter.

a) Mutassuk meg, hogy bármely valós a esetén két különböző valós gyöke van az egyenletnek.

b) Jelölje az egyenlet két gyökét x_1 és x_2. Igazoljuk, hogy $|x_1-x_2|\geq 6$. Az a paraméter mely értéke esetén lesz $|x_1-x_2|=6$?

2. Az *ABCD* rombusz *A*-nál levő belső szöge 60°-os. Vegyük fel az *AD* oldalon az *N*, a *DC* oldalon pedig az *M* pontot úgy, hogy a *BNM* háromszög egyik szöge 60°-os legyen. Bizonyítsuk be, hogy a *BNM* háromszög szabályos.

3. Igazoljuk, hogy ha egy pozitív egész szám osztható 99-cel, akkor számjegyeinek összege legalább 18.

4. Az *a*, *b*, *c* olyan valós számok, amelyekre teljesül, hogy $|ax^2+bx+c|\leq 1$ bármely $x\in[-1;1]$ esetén. Mutassuk meg, hogy ekkor $|cx^2+bx+a|\leq 2$ bármely $x\in[-1;1]$ esetén.

5. Egy 5 egység sugarú körbe írt négyzetet felosztottunk egymással egybevágó kisebb négyzetekre. Valamelyik két kis négyzetet elvéve a maradék belefér egy 4 egység sugarú körbe. Igaz-e, hogy ilyenkor mindig elvehető még egy kis négyzet úgy, hogy a maradék elférjen egy 3 egység sugarú körben? (A választ indokolni kell.)

6. A $2n$ jegyű (n pozitív egész) tízes számrendszerbeli $A_n=\overline{a_1a_2...a_{2n}}$ pozitív egész számokról a következőket tudjuk:

(1) $a_i\neq 0\,(i=1;2;...;2n)$;

(2) $a_1a_2+a_3a_4+...+a_{2n-1}a_{2n}$ páros szám.

Határozzuk meg *n* függvényében az A_n számok számát.