Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LI. esztendő

2012-2013. tanév

12. évfolyam

I. forduló

1. A derékszögű koordináta-rendszerben az $y = 4x^2 + 7x - 1$ egyenletű parabolára illeszkedik az A és a B pont úgy, hogy az AB szakasz felezőpontja az origó. Milyen hosszú az AB szakasz?

2. Kör alakú biliárdasztal AB átmérőjének negyedelő pontjából milyen irányban kell meglökni a golyót, hogy az a falról visszapattanva az AB átmérő egyik harmadoló pontján haladjon keresztül?

3. Legyen p páratlan prímszám, és legyen $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{p-1} = \frac{m}{n}$, ahol m és n relatív prím pozitív egészek. Bizonyítsuk be, hogy m osztható p-vel.

4. Egy hegyesszögű háromszög szögei α, β, γ. Mutassuk meg, hogy

$$2 < \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma .$$

5. A sík pontjainak halmazán egy kétváltozós műveletet értelmezünk: az (A; B) rendezett pontpárhoz azt a C pontot rendeljük, amelyre teljesül, hogy a C pont A-ra vonatkozó tükörképe B. Adott egy négyzet három csúcsa. Előállítható-e ezekből a pontokból az előbb definiált művelet véges sokszori alkalmazásával a négyzet negyedik csúcsa?

6. Adott a síkon n darab ($n \geq 4$) egyenes úgy, hogy semelyik kettő nem párhuzamos, és a sík egyetlen pontjára sem illeszkedik kettőnél több egyenes. Ezek az egyenesek a síkot feldarabolják nem korlátos tartományokra és sokszögekre. Igazoljuk, hogy a keletkezett sokszögek között legalább $\frac{2n-2}{3}$ darab háromszög van.