Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LI. esztendő

2012-2013. tanév

12. évfolyam

II. forduló

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet.

$$\log_2 x - \log_3 x = \sqrt{1-x}$$

2. Adott az $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, $f(x) = x^2 + 6x + 1$ függvény. Jelölje H a koordinátasík azon $P(x;\, y)$ pontjainak halmazát, amelyekre $f(x) + f(y) \leq 0$ és $f(x) - f(y) \leq 0$. Számítsuk ki H területét.

3. Határozzuk meg a $g: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, $g(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 13} + \sqrt{x^2 - 14x + 58}$ függvény minimumát és minimumhelyét.

4. Az ABC háromszög B csúcsából induló belső szögfelező a szemközti oldalt az M, a C csúcsból induló belső szögfelező a szemközti oldalt az N pontban metszi. Az M kezdőpontú MN félegyenes a háromszög köré írt kört D-ben metszi. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{BD} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{CD}.$$

5. Az S halmaznak hat eleme van. Mutassuk meg, hogy akárhogyan is választjuk ki S-nek hat darab háromelemű részhalmazát, S elemei kiszínezhetők két színnel úgy, hogy mindegyik kiválasztott részhalmaz kétszínű legyen.

6. A szigorúan növekvő $\{a_n\}$ sorozat az összes olyan pozitív egész számból áll, amelyeknek tízes számrendszerbeli alakjában csak páros számjegy fordul elő. Mely pozitív egész n esetén teljesül, hogy $a_n = 12n$?