Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LII. esztendő

2013-2014. tanév

11. évfolyam

II. forduló

1. „Három elefántot kell berakodnunk.” – szólt a hajóskapitány az első tiszthez.
„Hány évesek az elefántok?” – kérdezte az első tiszt.
„Mindegyik elmúlt már 2 éves, és életkoraik szorzata 2450.” – volt a válasz.
„Mennyi az életkoraik összege?”
„Azt felesleges elárulnom, mert abból még nem tudnád megállapítani az életkorukat. – mondta a hajóskapitány, majd hozzátette – Az egyik idősebb nálam.”
„Akkor már tudom, hogy hány évesek az elefántok.” – mondta az első tiszt.
Hány évesek az elefántok? (Feltételezzük, hogy az első tiszt tényleg tudta, hány éves a kapitány.)

2. Milyen valós a értékekre van az alábbi egyenletrendszernek valós megoldása?

$$\left.\begin{array}{l} x^3+y^3+3xy=a \\ x+y=xy \end{array}\right\}$$

3. Az ABC háromszögben az ACB szög kisebb, mint az ABC szög. Az A-ból induló belső szögfelező a BC oldalt M-ben metszi, és B csúcs merőleges vetülete az AM szakaszon P. Igazoljuk, hogy $\dfrac{PA}{PM}=\dfrac{AB+AC}{AC-AB}$.

4. Legyen $a_n=1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}$, ahol n pozitív egész számot jelöl. Bizonyítsuk be, hogy van olyan k pozitív egész szám, amelyre az $a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_k$ szorzat értéke nagyobb 1000-nél. Melyik a legkisebb ilyen k szám?

5. A valós számok halmazán értelmezett $f(x)=ax^2-bx+c$ függvény a főegyütthatójára teljesül, hogy $|a|<1$ és $a\neq 0$. Bizonyítsuk be, hogy ha $f(a)=-b$ és $f(b)=-a$, akkor $|c|<3$.

6. Az ABC háromszög belsejében lévő P pontra $PAB\angle=PBC\angle=PCA\angle=\varphi$. Mutassuk meg, hogy ha a háromszög szögei α, β és γ, akkor

$$\frac{1}{\sin^2\varphi}=\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}+\frac{1}{\sin^2\gamma}.$$

MAGYARORSZÁG MEGÚJUL

A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.