HIMT
2015. március 21.
Gyula
Harruckern János Középiskola

Néhány érdekes függvényről

Dr. Németh József
címzetes egyetemi tanár
SZTE TTIK Bolyai Intézet
Analízis Tanszék

Dilemma: Tanároknak milyen témájú előadást? Elemi matematika – felsőbb matematika.

Riesz Frigyes 1925 (90!); rektori *székfoglalója.*

"Elemi módszerek a felsőbb matematikában."

"Gyakran szembeállítják a matematika *elemeit* a *felsőbb* matematikával, ill. a középiskolai matematikát a főiskolaival úgy, mint amelyeknek tárgya, fogalmai, nyelve egymástól idegenek"...

"Kétszer kell felejteni", aki tanári pályára készül.

R. cáfolja: "a tudományok szervesen összefüggő rendszerek"

Skatulyaelv – Dirichlet–Kronecker-féle tétel ($\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots, n\alpha$; $\exists$ olyan, amelynek a legközelebbi egész számtól való eltérése $\leq \frac{1}{n}$) [Dirichlet sixtusi kápolna, húsvéti zene közben]

Polygon, I. kötet 2. szám, 1991 (Pintér Lajos)

A mai témánk is az *elemi* és *felsőbb* matematika határán van.

Izgalmas (pl. eddig sokszor a *végtelennel* kapcsolatos viták; civakodások, ellentmondások...)

Most a *függvényről* beszélek (fontos fogalom már a középiskolában is.)

Tanároknak fontos; ld. **Pólya**: "...ha a tudomány valamelyik területét (vagy elméletét, vagy fogalmát) tanítjuk, akkor az emberpalántáknak nagy lépésekkel nyomon kell követniük az emberiség szellemi fejlődését".

Newton, Leibniz; Euler: függvény - bármilyen kis szakaszon ismerjük, abból le lehet vezetni azt a szabályt, amelynek a függvény teljes menetében eleget tesz.

Gond XVIII. sz. végén, ill. XIX. sz. elején a *fizikában* (hővezetés)

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} = \operatorname{sgn} x; \ -\pi < x < \pi.$$

(emlékeztető – végtelen – Riemann–Cauchy, Weierstrass)

XIX. sz. Cauchy–Riemann–Weierstrass fejlesztette tovább

Pl. "analitikus" (komplex függvénytan; differenciálható; folytonos; hatványsor; differenciálással, integrálással újabb "analitikus", sőt egyenletes konvergenciával, stb.)

XIX. sz. végén: " csak az analitikus függvények alkalmasak és méltók arra, hogy a matematikai analízis tárgyai legyenek".

Vö. (Szőkefalvi-Nagy Béla) "a természetben semmi sem analitikus".

"A legáltalánosabb és legmerészebb fogalomalkotások felelnek meg leginkább az érzékelhető világról alkotott elméleti képünk kialakulásához." (ld. előbb: hővezetés - Fourier sor - sgn x függvény)

Dirichlet, Riemann (XIX. sz. közepén): a függvény általános definíciója $a(\in A) \xrightarrow{f} b(\in B)$; egyértelmű hozzárendelés

Sok dolog megdőlt.

Pl. a N-L tétel: $\int\limits_a^b f' = f(b) - f(a)$. [Vito Volterra függvénye: a derivált integrálásával nem kapjuk vissza az eredeti függvényt...]

Reakció; ellenvetések (Poincare; Hermite, stb.)

"szörnyetegnek, patologikusnak (betegesnek), teratológikusnak (nyomorék, torzszülött)" nevezték ezeket az "új" függvényeket (vö.: Cauchy folytonossági definíciója), amelyek az "abszolút szigorúság jegyében születtek meg"; "bizarr függvények tömege"; "függvény, mely nem deriválható??" (métely)

Későbbi összegzés (Hilbert):

"Az analízis tudománya a mértékelmélet, a metrikus terek elmélete, az absztrakt topológia, fraktálok, és más ágak létrehozásával jelentős fejlődésen ment keresztül – nem kis részben a "szörnyszülött" függvényeknek köszönhetően.

MA: Két fogalom közé csoportosítva 1-2 "bizarr" függvényről fogok beszélni. (Cím?)

A) *Folytonosság*;

B) "*Grafikon*"

A)

α) f folytonos x_0-ban, ha $\forall\, \varepsilon > 0$)- hoz $\exists\, \delta(> 0)$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ [vö.: nem kell felemelni a ceruzát a rajz közben] [Kicsit változik x, kicsit változik y.]

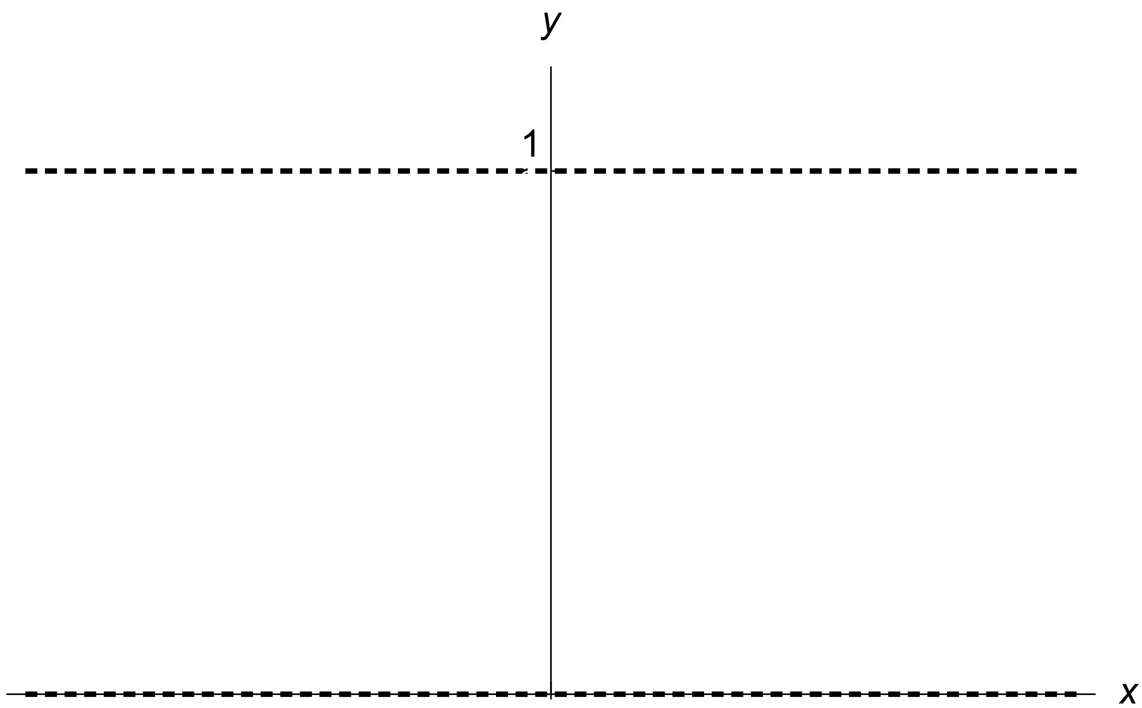
β) $x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$

a) Dirichlet-fgv.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ rac.,} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irrac.} \end{cases}$$

Sehol sem folytonos függvény.

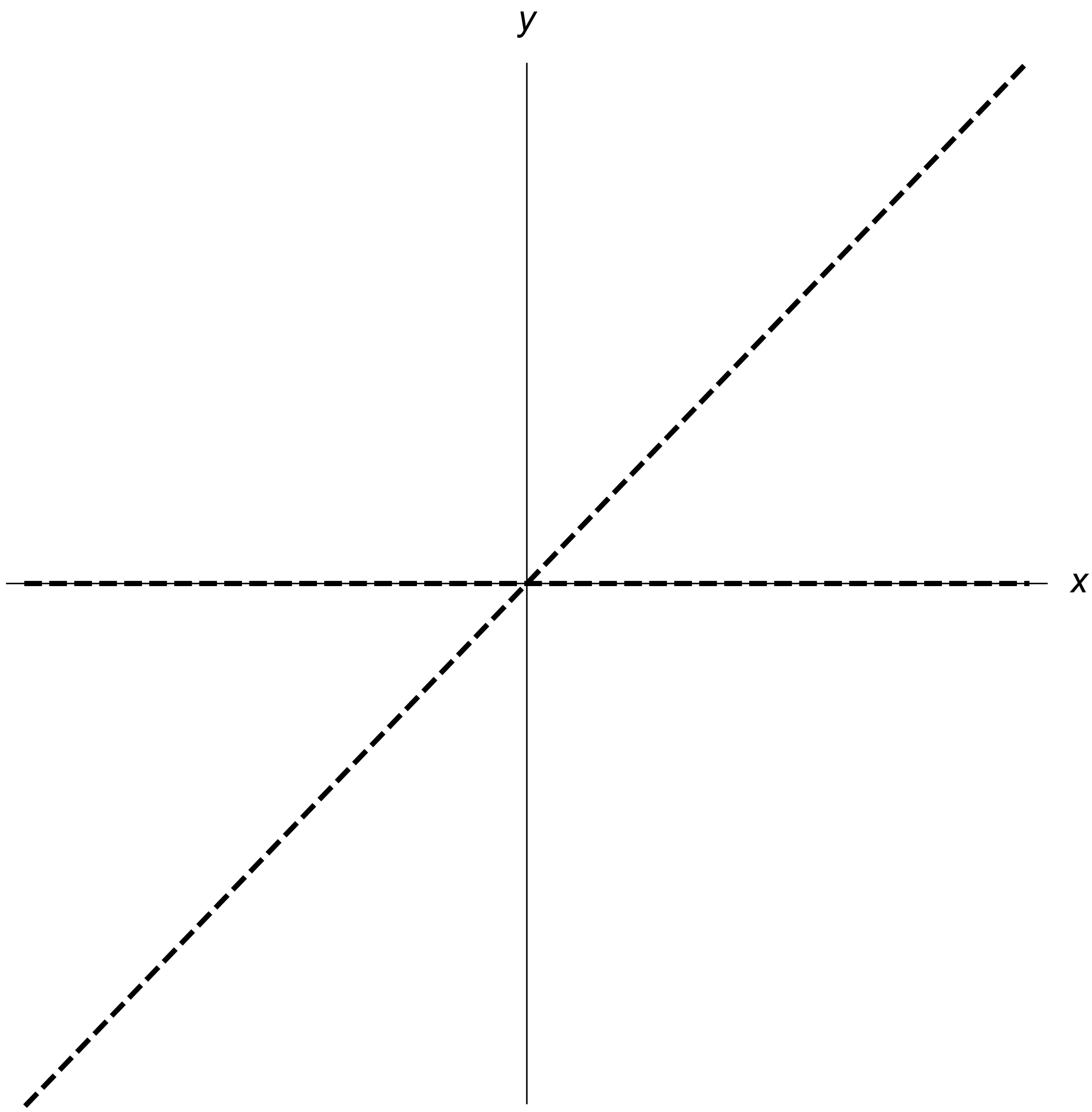
Ábra:



b)

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \text{ rac.,} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irrac.} \end{cases}$$

Ábra:



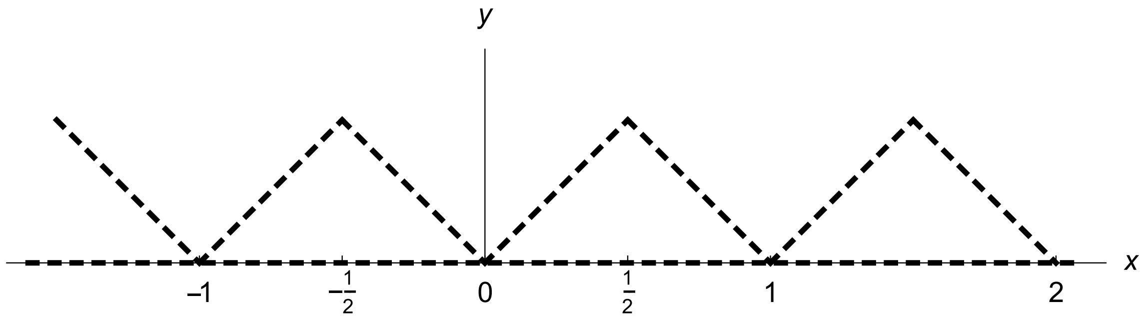
Csak egy pontban folytonos. (Kréta)

c)

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{ha } -1/2 \le x \le \frac{1}{2} \text{ és } x \text{ racionális;} \\ 0, & \text{ha } -1/2 < x < \frac{1}{2} \text{ és } x \text{ irracionális,} \end{cases}$$

és $p = 1$ periódussal folytatva $\mathbb{R}$-en.

Ábra:



Csak az egész helyeken folytonos.

d) f: csak a racionális helyeken folytonos?

Szünet – gondolkodás (10')

e) *Riemann*-féle függvény

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{ha } x = \frac{p}{q};\ p, q \text{ egész; } (p,q) = 1;\ q > 0; \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$$

α) $f \notin C_{x_0}$, ha $x_0 \in \mathbb{Q}$ $(x_0 = \frac{p}{q})$

$(x_n \in \overline{\mathbb{Q}}$ és $x_n \to x_0$; $f(x_n) \equiv 0; f(x_n) \not\to f(x_0) = \frac{1}{q})$

β) $f \in C_{x_0}$, ha $x_0 \in \overline{\mathbb{Q}}$

Biz. (vázlat) Legyen $x_0 \in \overline{\mathbb{Q}}$ és $x_0 \in (0;1)$ és pl. $\varepsilon = \frac{1}{1000}$.

Nyilván csak véges sok 1000-nél kisebb nevezőjű rac. szám van a $(0;1)$-en; legyen $\delta(> 0)$ az x_0-hoz legközelebbinek a távolsága x_0-tól. $\Rightarrow f(x) \leq \frac{1}{1000}$, ha $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, hiszen ha $x = \frac{p}{q}$, akkor

$f(x) = \frac{1}{q} \leq \frac{1}{1000}$ (mert $q \geq 1000$), ha $x \in \overline{\mathbb{Q}}$, akkor $f(x) = 0$.

Tehát $|f(x) - f(x_0)| = |f(x)| \leq \frac{1}{1000} = \varepsilon$, ha $x_0 \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$.

1. **Megj.:** f tehát m.m. folytonos.

2. **Megj.:** f sehol sem differenciálható (HF)

Segítség: Legyen $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, akkor $\exists$ végtelen sok p, q egész szám, hogy

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}$$

(ld. Hajnal Péter: Elemi kombinatórikai feladatok; Polygon; 1997; 3. oldal)

Vagy $x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$; $x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{10^k}$; $\lim\limits_{x_n \to x_0} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$;

3. **Megj.:** $f \in R_{[0;1]}$ (HF) de Lebesgue-kritériummal is – ld. 1. Megjegyzés)

(ld. Németh J. – Németh Z.: Analízis I. feladatgyűjtemény, Polygon; 2013; 127. oldal)

Visszatérés d)-re

Állítás: *Nincs olyan valós függvény, amelyre fennállna, hogy folytonos a racionális pontokban és nem folytonos az irracionális pontokban.*

[Vito *Volterra* ötlete alapján *Pintér Lajos* közölte a Polygon I. kötete 2. számában a 100. oldalon]

α) Rövid változat (most)

β) Precíz változat (a fenti cikkben), de (HF).

Ad α) Legyen

$$f = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{ha } x = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{Z};\ (p,q) = 1;\ q > 0 \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$$

az előzőkben vizsgált Riemann-függvény) és g olyan függvény, amely az irracionális pontokban nem folytonos, a racionális pontokban pedig folytonos.

A bizonyítás alapgondolata: Adott pozitív számhoz (pl. $\frac{1}{n}$; $n \in \mathbb{N}$) tudunk adni olyan zárt intervallumot, hogy ebben bármely két pontot is veszünk itt f értékeinek az eltérése ($|f(x_1) - f(x_2)|$), és g értékeinek az eltérése ($|g(x_1') - g(x_2')|$) kisebb, mint $\frac{1}{n}$. (f-nél x_0 irracionális; g-nél $\overline{x_0}$ racionális és $|f(x_1) - f(x_2)| \le |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_0)|$, hasonló g-re is áll: $|g(x_1') - g(x_2')| \le |g(x_1') - g(\overline{x_0})| + |g(x_2') - g(\overline{x_0}|$.

Ha tehát x_0-hoz δ_n sugarú az a környezet, amelyben az f függvény értékei eltérése kisebb, mint $\frac{1}{n}$, akkor ebből a környezetből veszünk $\overline{x_0}$-t és ennek lesz egy $\overline{\delta_n}$ sugarú környezete úgy, hogy ebben a g értékei eltérése lesz kisebb $\frac{1}{n}$-nél. Ekkor $[a_n, b_n]$ legyen a két környezet metszete.

Majd csökkentjük $\frac{1}{n}$-et pl. $\frac{1}{n+1}$-re és az előző zárt intervallumban találunk ehhez olyan zárt intervallumot ($[a_{n+1}, b_{n+1}]$) amelyben f és g eltérései már $\frac{1}{n+1}$-nél kisebbek. Így folytatva egymásba skatulyázott zárt intervallumok sorozatát kapjuk. Ezeknek van közös pontja.
A közös pont – durván szólva – rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy ha x-et "kicsit" megváltoztatjuk, akkor a függvényértékek is "kicsit" változnak, azaz egy ilyen pontban f is és g is folytonos kellene, hogy legyen, ilyen pont azonban nincs (mert olyan pont, amely racionális is és irracionális is – nincs.)

Precízen: $\varepsilon = 1/M \to [a_M, b_M]$ lesz a kívánt környezet...

Megj. Következmény: Nincs olyan $\mathbb{R}$-en folytonos függvény, amely a racionális helyeken irracionális értékeket vesz fel és az irracionális helyeken racionális értékeket vesz fel.

Ötlet: Ha g ilyen lenne, akkor vegyük az $f(g(x))$ függvényt (f a Riemann-függvény). Viszont $f(g(x))$ folytonos $\mathbb{Q}$ pontjaiban és nem folytonos $\overline{\mathbb{Q}}$ pontjaiban.

B) *A grafikon* $y = f(x)$

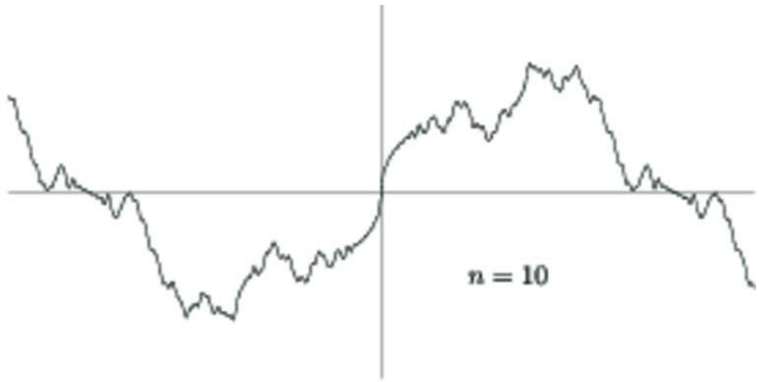
Pl.: $y = mx$; $y = x^2$; $y = \sin x$ grafikon, ill. Dirichlet-függvény; Riemann-függvény; mindenütt folytonos, sehol sem differenciálható függvény (pl.

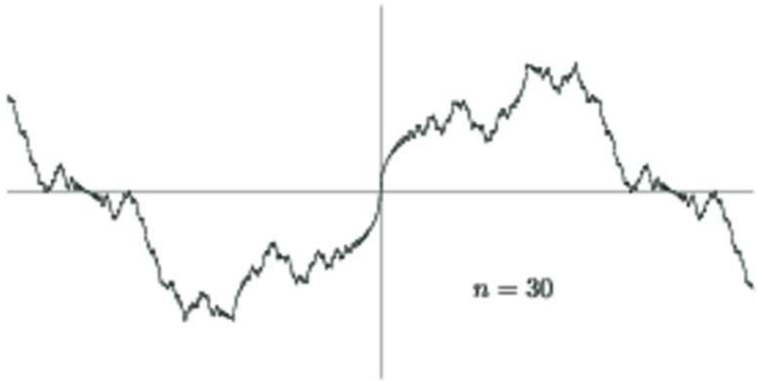
Weierstrass példája. Riemann próbálkozása – sehol se monoton, mindenütt folytonos függvény)

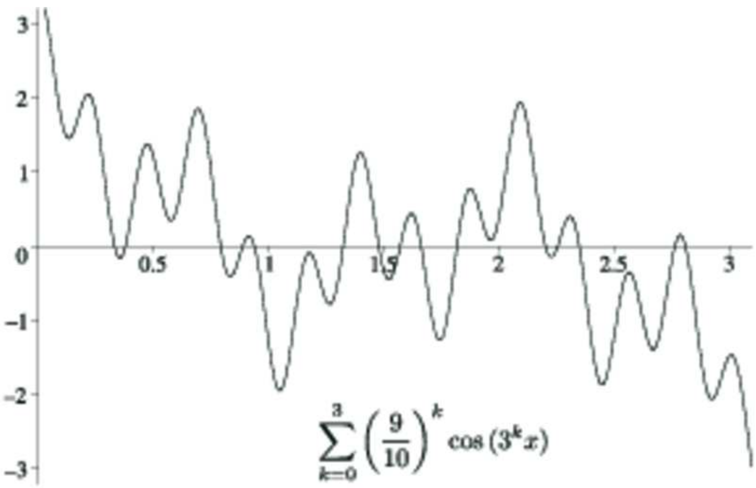
Riemann: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^2} = f(x)$

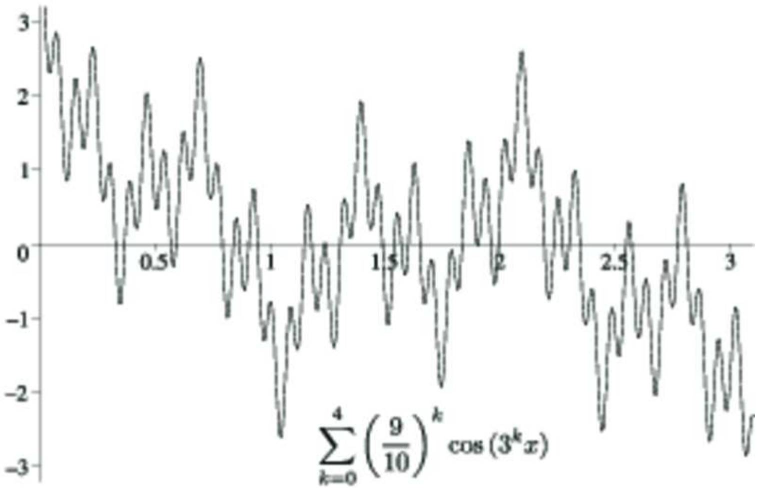
Weierstrass: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^k \cos 3^k x = f(x)$

Ábrák:





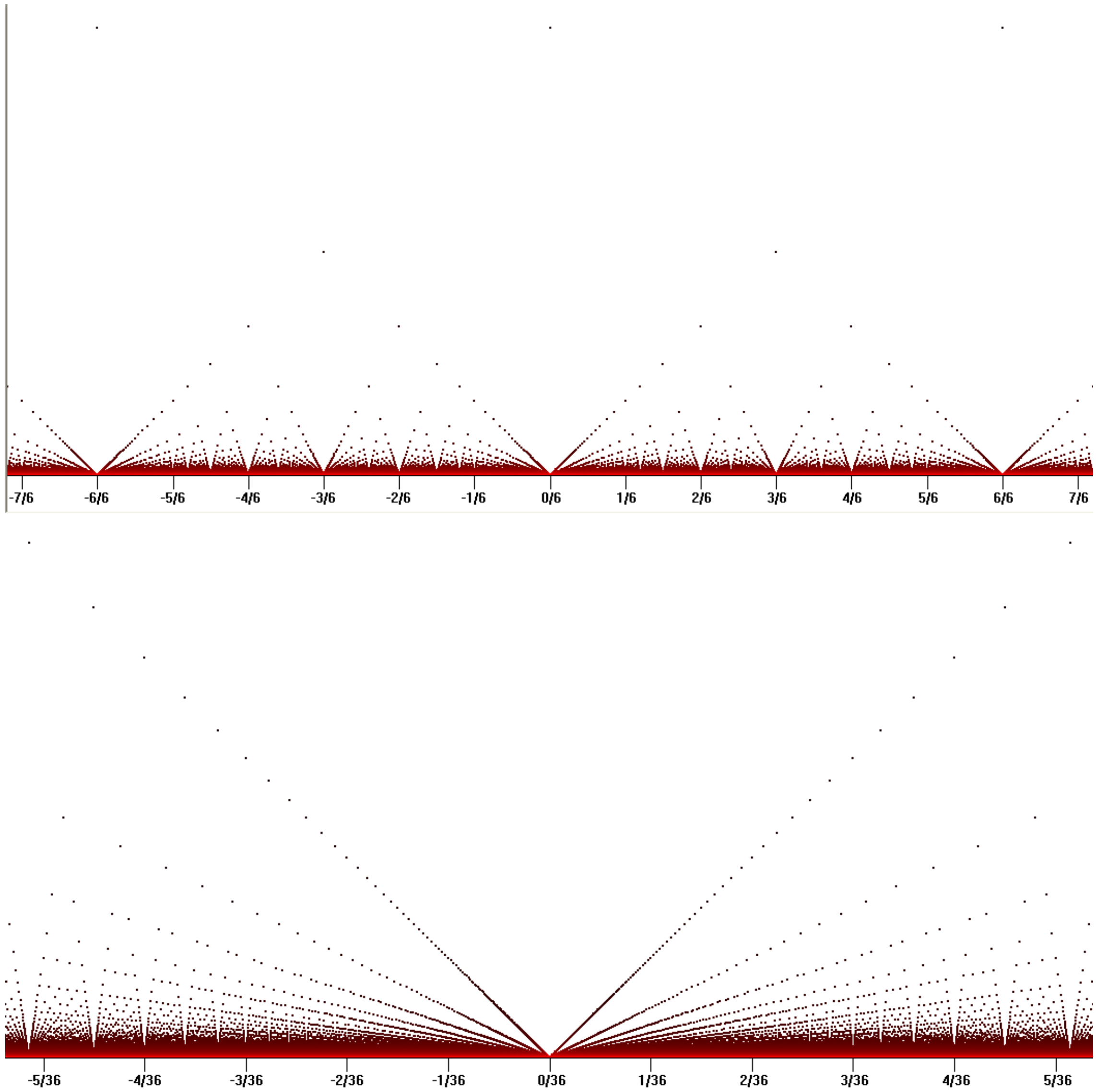




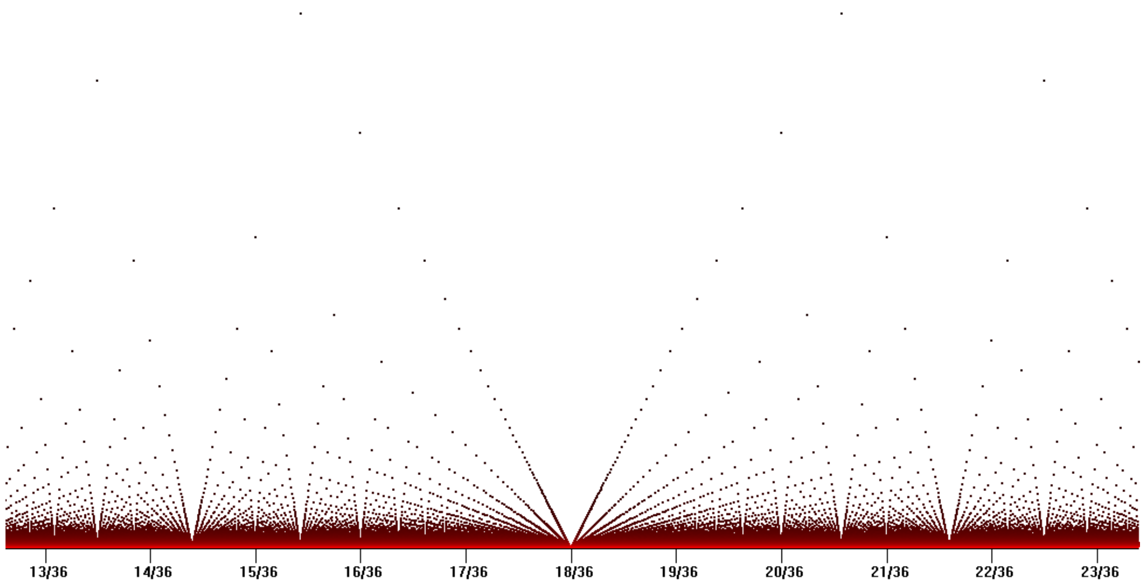
A korábban vizsgált Riemann-függvény ábrája.

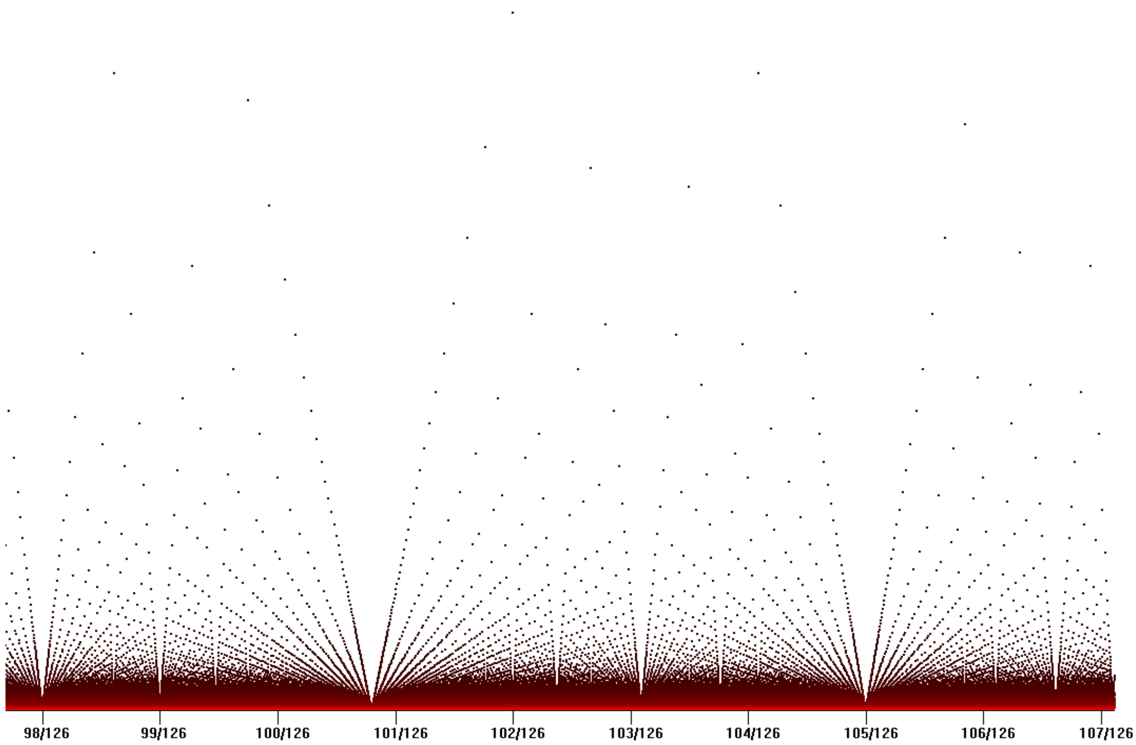
$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{ha } x=\frac{p}{q},\ p,q\in\mathbb{Z},\ (p,q)=1,\ q>0 \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$$

Ábra:



Pl.: $y = cx \Rightarrow \frac{1}{q} = c\frac{p}{q} \Rightarrow c = \frac{1}{p};\ q = kp+1, y = c(x-\frac{1}{6}), \frac{1}{q} = c(\frac{p}{q}-\frac{1}{6})\ldots$





Most a "bomba": Sierpinski-féle függvény

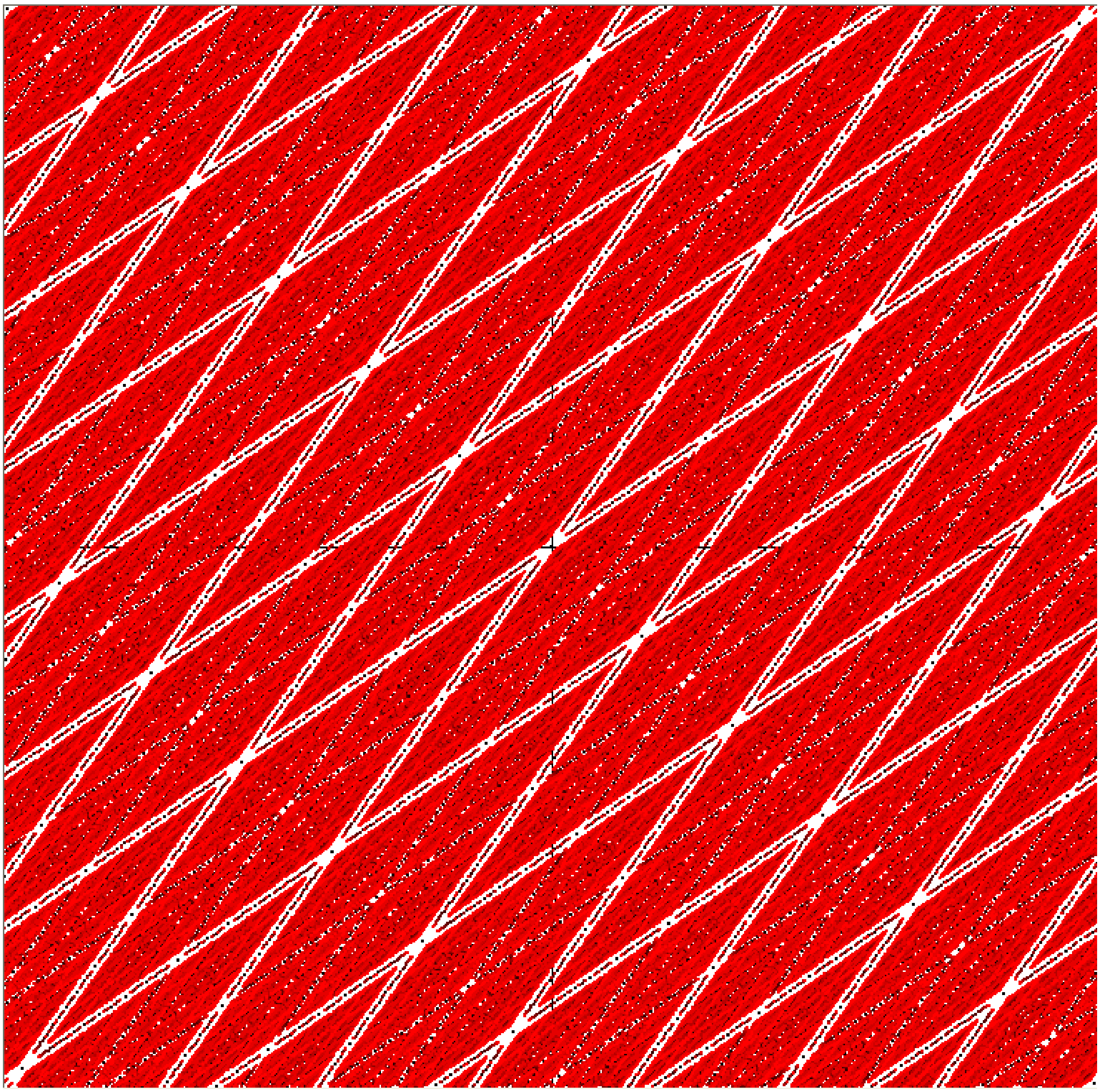
Grafikonja a síkon mindenütt **sűrű**.

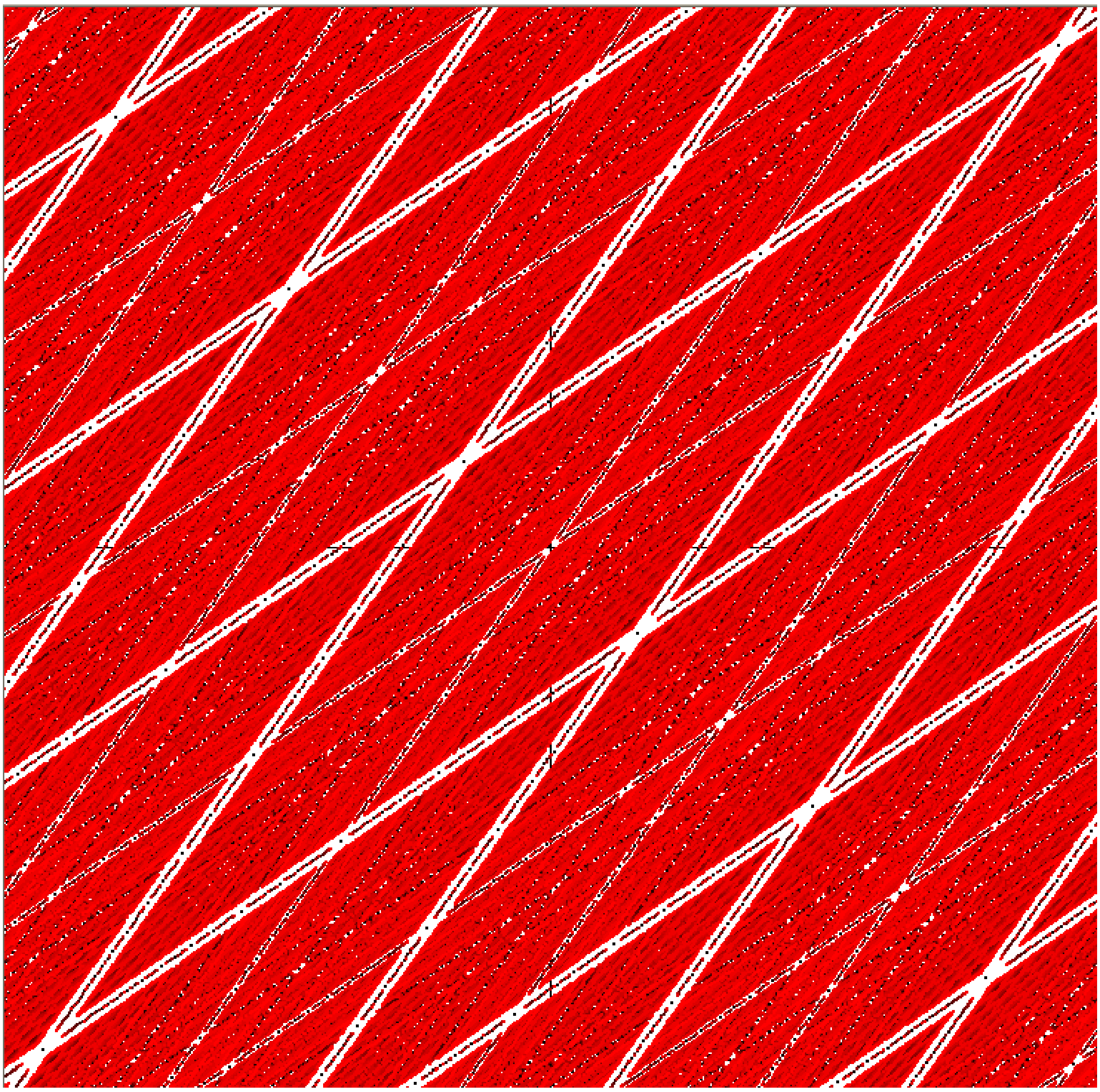
A definíció:

$$f(x) = \begin{cases} r + s\sqrt{2}, & \text{ha } x = s + r\sqrt{2} \ (r, s \text{ racionális}) \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Megj. az $r + s\sqrt{2}$ előállítás egyértelmű.

α) Ábra





Fraktál; hasonlóság; eltolás.

Nevezők ≤ 200

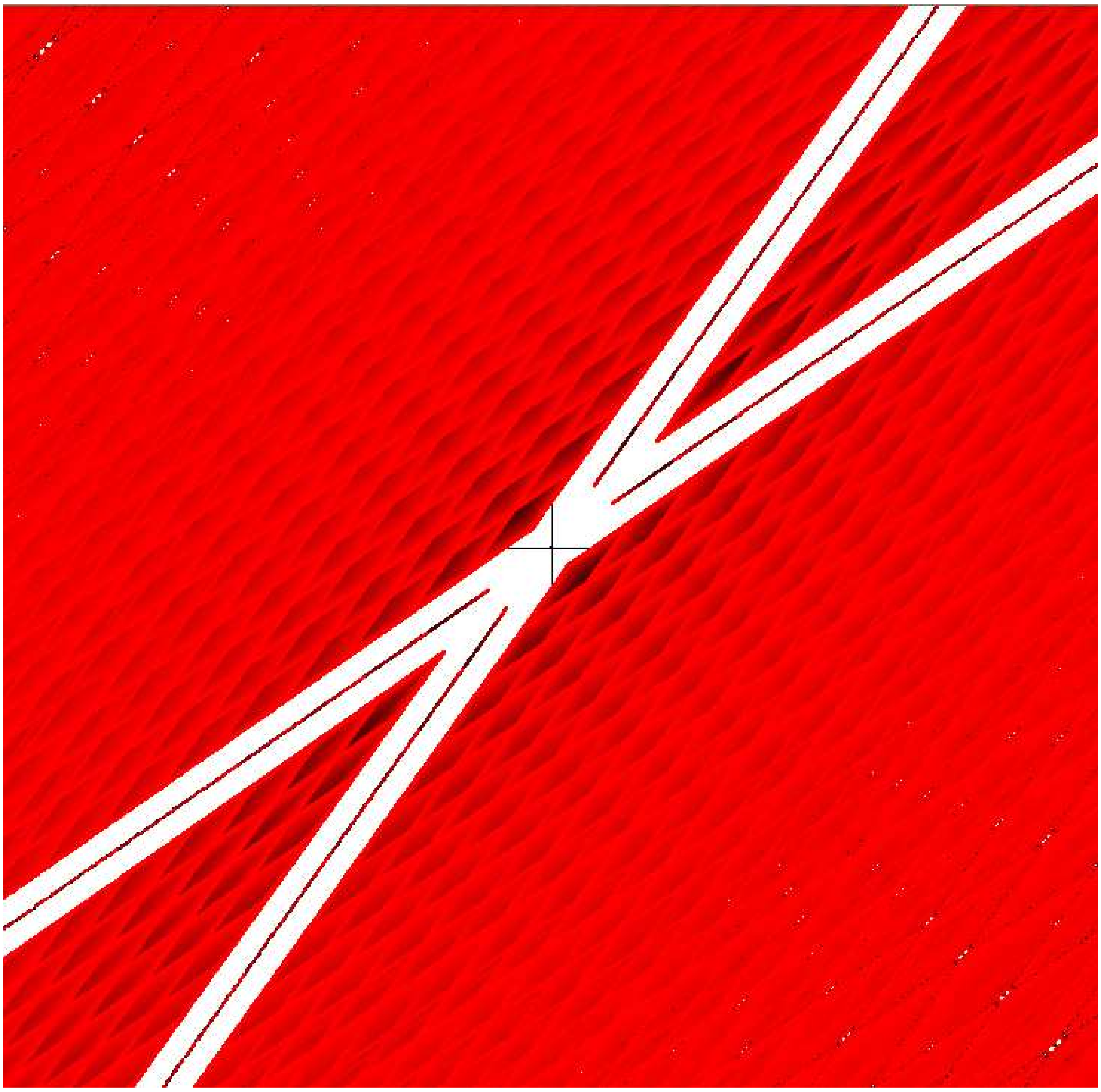
$y = \sqrt{2}x$

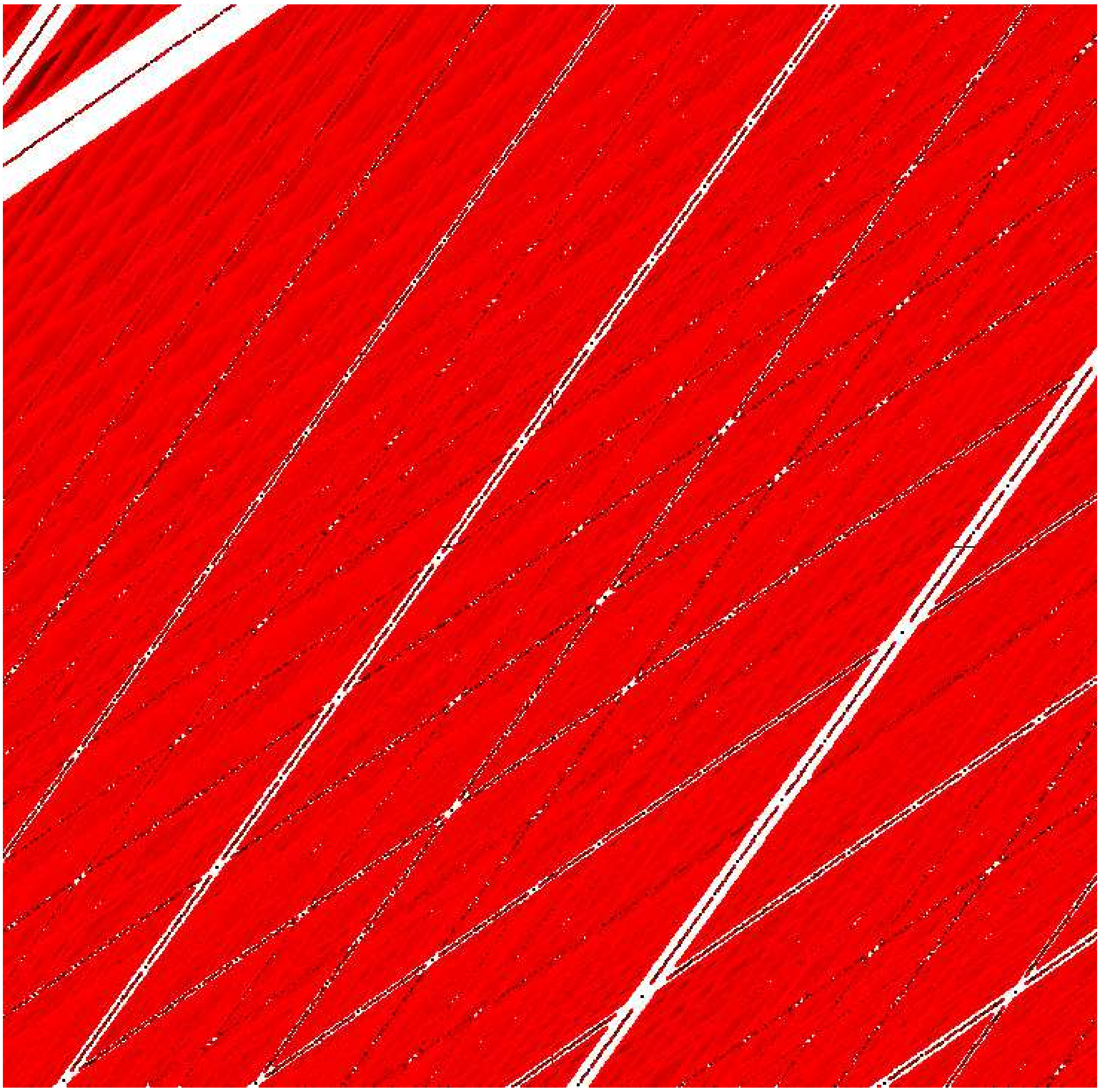
$x = a + \sqrt{2}b \Rightarrow y = b + \sqrt{2}a = \sqrt{2}(a + \sqrt{2}b) = a\sqrt{2} + 2b \Rightarrow b = 0$, a bármi

$a + \sqrt{2}b$ (b rögzített)

$a + \sqrt{2}b \to b + a\sqrt{2}$ (párhuzamos eltolás)

Egy sávban 12125 (Dr. Némethné Varga Éva)





β) Mindenütt sűrűn vannak a ”grafikon” pontjai. Legyen $(x;y) \in \mathbb{R}^2$; tetszőleges. Be kell látni, hogy $\exists a_n, b_n$ racionális számsorozatok, hogy

$$\lim_{\infty}(\overbrace{a_n + b_n\sqrt{2}}^{x_n}) = x$$

$$\lim_{\infty}(\overbrace{b_n + a_n\sqrt{2}}^{f(x_n)}) = y$$

Ha $\exists$ ilyenek, akkor

$$\left.\begin{aligned} \lim(\sqrt{2}a_n + 2b_n) = \sqrt{2}x \\ \lim(2b_n + 2\sqrt{2}a_n) = 2y \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim a_n(\sqrt{2} - 2\sqrt{2}) = \sqrt{2}x - 2y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim a_n = \frac{\sqrt{2}x - 2y}{\sqrt{2} - 2\sqrt{2}} = \frac{2y - \sqrt{2}x}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}y - x$$

Hasonlóan

$$\lim b_n = \frac{2x - \sqrt{2}y}{2\sqrt{2} - \sqrt{2}} = \frac{2x - \sqrt{y}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}x - y.$$

Mivel $\forall$ irracionális számhoz van hozzátartó racionális számokból álló sorozat, így beláttuk az állítást.