XXII. Hajnal Imre Matematika Tesztverseny 2018

Megoldások

(1.) $9^3 \cdot 3^2 = (3^2)^3 \cdot 3^2 = 3^6 \cdot 3^2 = \underline{\underline{3^8}}$ $\boxed{D}$

(2.) A fiúk össztömege: 350 kg.
A lányok össztömege: 244 kg
A teljes csoportra vett átlag: $\frac{350+244}{9} = \underline{\underline{66\,(kg)}}$ $\boxed{B}$

(3.) $770 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11.$
A feltételnek megfelelő lehető számpár: $(22;35)$,
$22+35 = \underline{\underline{57}}$ $\boxed{B}$

(4.) A nagymutató $360°$-ot, a kismutató $\frac{360°}{12} = 30°$-ot forog 1 óra alatt. $\boxed{A}$
A mutatók közötti (egyik) szög:

$$\frac{35}{60} \cdot 360° - \frac{35}{60} \cdot 30° = \frac{35}{60} \cdot 330° = 192{,}5°$$

A kisebbik szög így: $360° - 192{,}5° = \underline{\underline{167{,}5°}}$

(5.) $\overline{6a3} + \overline{2b5} = 808 + 10(a+b) =$
$= 9(89+a+b) + (a+b+7)$ $\boxed{E}$

$9 \mid (a+b+7) \Rightarrow a+b=2$ vagy $\underline{\underline{a+b=11}}.$

6. $T = 5\cdot 4 + 2\cdot 6 + \frac{6\cdot 3}{2} = 41\ (cm^2)$ C

7. $T_0 = a^2 \qquad T_1 = (1{,}5a)^2 = 2{,}25a^2$ D

125%-kal nő a terület.

8. $a\circ(b\circ c) = a\circ\frac{1}{bc} = \frac{1}{\frac{a}{bc}} = \frac{bc}{a}$ C

9. $a + (a+2) + \dots + (a+200) = 101a + (2+4+\dots+200) =$

$= 101a + 2\cdot\frac{100\cdot 101}{2} = 101(a+100) = 12\,827.$ B

$a + 100 = 127$

$a = 27$

10. $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$ D

Ellenpéldák: „$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$" hamis, ha $a > 0$ és $b > 0$.

„$ac > bc$" hamis, ha $c \leq 0$.

„$a^2 > b^2$" hamis, ha $b < 0$ és $|b| \geq |a|$

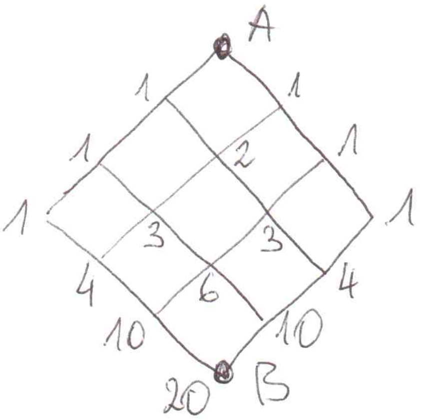
„$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$" hamis, ha $a < 0$.

11. A beírt kör sugara $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, ahol a a háromszög oldala.

$3 = 2r\pi = \frac{a\sqrt{3}\cdot\pi}{3} \longrightarrow a = \frac{9}{\sqrt{3}\pi}$ C

$K_\Delta = 3a = \frac{\overset{3}{\cancel{9}}\sqrt{3}}{\pi}$

12.



20 út

D

13. $\dfrac{2x^2-3x+4}{x^2+2} > 1 \iff \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2} > 0$

A

$\iff x^2-3x+2=(x-2)(x-1) > 0$

$\Downarrow$

$x<1$ vagy $2<x$

14. $9\cdot16=144=12^2 \implies K_{\square}=4\cdot12=\underline{48}$

D

(Megvalósítható az átrakás.)

15. $x+y+xy=34 \quad |+1$

$xy+x+y+1=35$

$\underbrace{(x+1)(y+1)}_{\text{csak } 5\cdot7 \text{ lehet, így } x+y=10}=35$

A

16. A peták az örökség. Ha az első két gyermek ugyanannyit kapott, ezért

$100000+\dfrac{A-100000}{10}=200000+\dfrac{1}{10}\left(A-200000-100000-\dfrac{A-100000}{10}\right)$

$A=8\,100\,000$, egy gyermek 900 000 petákot kapott.

$\implies$ 9 gyermeke volt a gazdag embernek.

D

17. $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2018}\right)=$

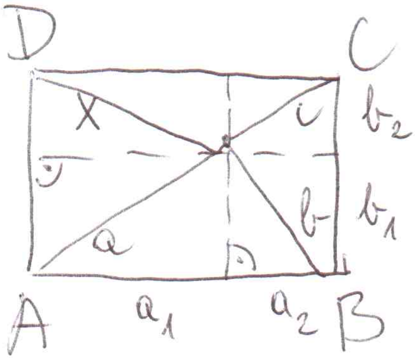
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2016}{2017}\cdot\frac{2017}{2018}=\underline{\underline{\frac{1}{2018}}}$$

$\boxed{A}$

18. $$\frac{100+n}{100}\cdot m=\underline{\underline{m\left(1+\frac{n}{100}\right)}}$$

$\boxed{D}$

19.



$$x^2+b^2=\left(a_1^2+b_2^2\right)+\left(a_2^2+b_1^2\right)$$
$$a^2+c^2=\left(a_1^2+b_1^2\right)+\left(a_2^2+b_2^2\right)$$

$$x^2+b^2=a^2+c^2$$
$$x^2=a^2-b^2+c^2$$
$$\underline{\underline{x=\sqrt{a^2-b^2+c^2}}}$$

$\boxed{D}$

20. D : az adott hosszt Dani nyerte.
M : az adott hosszt Marci nyerte.

1. $MM=0$ ((1) és (2))
2. $MD+DM=9$ ((3))
3. $DM+DD=7$ ((4))
4. $MD+DD=6$ ((4))

$$\left.\begin{array}{l}MD+DM=9\\DM+DD=7\end{array}\right\}\Rightarrow MD-DD=2$$

$$MD-DD=2$$
$$MD+DD=6$$

$$MD=4$$
$$DM=5$$
$$DD=2$$

$$\underline{\underline{11}}$$

$\boxed{C}$

1. kategória

21. $f(g(x)) = 10\,g(x) = -5x$

$$g(x) = -\frac{x}{2}$$

$\boxed{B}$

22. Konvex sokszög átlóinak száma:

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

(A) $9 = \frac{n(n-3)}{2} \to n = 6$

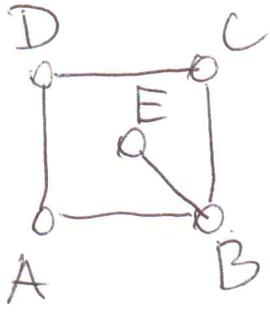
(B) $27 = \frac{n(n-3)}{2} \to n = 9$

(D) $54 = \frac{n(n-3)}{2} \to n = 12$

(C) $5 = \frac{n(n-3)}{2} \to n = 5$

$\boxed{C}$

23.



Két eset:

1. A és C különböző színű

$B \to 3$
$A \to 2$
$C \to 1$
$E \to 2$
$D \to 1$

12 lehetőség

2. A és C azonos színű

$B \to 3$
$A \to 2$
$C \to 1$
$E \to 2$
$D \to 2$

24 lehetőség

36 lehetőség

$\boxed{D}$

24. $n!$ 5-ös prímtényezőinek a száma adja a 0-k számát.

$n! = A \cdot 5^{88} \quad (5 \nmid A)$

$$88 = \left[\frac{n}{5}\right] + \left[\frac{n}{25}\right] + \left[\frac{n}{125}\right] + \dots + \left[\frac{n}{5^k}\right] + \dots$$

„Becserkészszük."

$100!$ $\quad 20+4=24$ 0-ra végződik

$200!$ $\quad 40+8+1=49$ — " —

$300!$ $\quad 60+12+2=74$

Még 14db 0 kellene.

$\boxed{C}$

$5^{14} \mid (301+302+\dots+(300+m))$

m lehetséges legkisebb értéke $\underline{60}$, ekkor

$\frac{60}{5} + \left[\frac{60}{25}\right] = 12+2$ az új 0-k száma.

25. 1. Háromjegyű szám nem lehet az összegben, ugyanis $123+4+5+6+7+8+9 > 144$.

2. $\dots + \boxed{n+(n+1)} + \dots \longrightarrow \dots + \boxed{11n+1} + \dots$

Egy „+" jel kiírtele $9n$-nel növeli az összeget. (Pl. $3+4 \xrightarrow[+9\cdot 3]{} 34$)

$\boxed{C}$

3. $1+2+\dots+9=45$

$144-45=99 \Rightarrow 11\cdot 9$-cel kell nőni az összegnek

Ut példában: $11=4+7$.

4. $11=1+4+6$; $11=3+8$ } több lehető-
$1+3+7$ } ség nincs.

$\underline{3 \text{ új felbontás van.}}$

II. kategória

(21.) $9\log_a^2 x + 4\log_a^2 y - 12\cdot\log_a x\cdot\log_a y = 0$

$(3\log_a x - 2\log_a y)^2 = 0$

$\log_a x^3 = \log_a y^2 \iff x^3 = y^2$

$\boxed{A}$

(22.) $(0;a)$ illeszkedik a grafikonra (parabolára)

$\Rightarrow a = 9$

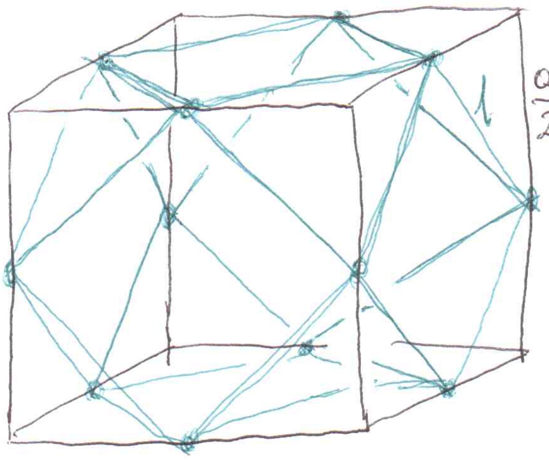
$(b;1)$ is illeszkedik a parabolára

$\Rightarrow 2b^2 - 8b + 9 = 1 \iff (b-2)^2 = 0 \iff b = 2$

Az meredekség: $\frac{1-a}{b-0} = -4$

$\boxed{D}$

(23.)



A kocka éle: $a = \sqrt{2}$

A kocka térfogata: $V = 2\sqrt{2}$

A levágott rész térfogata:

$V_{levágott} = 8\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{a^3}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

$V_{maradék} = 2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{5\sqrt{2}}{3}$ $\boxed{D}$

(24.) $\sin 6x + \cos 4x = \sin 6x + \sin(90^\circ - 4x) =$

$= 2\sin(x + 45^\circ)\cdot\cos(5x - 45^\circ) =$

$= 0$

1. $x = -45^\circ + k\cdot 180^\circ \ (k\in\mathbb{Z})$ vagy 2. $x = 27^\circ + l\cdot 36^\circ \ (l\in\mathbb{Z})$

$x_{min} = 27^\circ$

$\boxed{A}$

25. m db piros ; n db fehér

két lehetőség:

1. FP : $P(FP) = \frac{n}{m+n} \cdot \frac{m}{m+n+k}$

2. PP : $P(PP) = \frac{m}{m+n} \cdot \frac{m+k}{m+n+k}$

$P(2.\text{ húzás piros}) = P(FP) + P(PP) =$ $\boxed{A}$

$$= \frac{mn + m(m+k)}{(m+n)(m+n+k)} = \underline{\underline{\frac{m}{m+n}}}$$