

Az első transzcendens számról
(Dr. Pintér Lajos emlékére)

HIMTV
Gyula, 2019. 03. 23.

Dr. Németh József
címzetes egyetemi tanár
SZTE TTIK Bolyai Intézet
Analízis Tanszék

- 2018 november (2019 jan.)
- Racionális; irracionális (algebrai, transzcendens)
- m.m. szám *transzcendens*
- Belátni egy számról elég nehéz
- Hermite 1873 az e -ről
- Lindemann 1882 a π -ről
- Utána $\sin r$, $\cos r$, $\operatorname{tg} r$, $\operatorname{ctg} r \dots$ (ahol $r \neq 0$ algebrai) (Lindemann–Weierstrass tétel; 1885)
- Ez előtt csak olyan számokról, amelyeket ”úgy csináltak” (az irracionális számok racionálisokkal való approximációjára építve).
- **Liouville:** Ha α gyöke egy egész együtthatós n -ed fokú polinomok, akkor csak véges sok olyan $\frac{p}{q}$ alakú tört van, amelyre $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{n+1}}$.
- Ebből következik egy ”teszt”.
- Fordítva nem működik; pl. π -nél, e -nél nem működik ez a módszer.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}} = 0,110001000 \dots$ rac. közelítés!!!)
(Liouville szám; 1844!)
- Pintér Lajos a tagozatos könyvében bemutatja ennek a számnak a transzcendens voltát, alapvetően a Liouville-tételre építve

- Ennek kicsit más irányú bizonyítását Pintér Lajos személyes beszélgetésben mondta el nekem ("levetkőztetve" olyanná, hogy *még egyszerűbb* legyen); Ő ennek *művésze* volt.
- A biz. előtt 1-2 szót Pintér Lajosról...

Bizonyítsuk be, hogy az

$$(1) \quad L_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{10^{j!}} = 0,11000100\dots$$

szám transzcendens.

Megoldás. Végezzünk indirekt bizonyítást. Tegyük fel, hogy van olyan $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ egész együtthatós polinom, hogy $P(L_0) = 0$. Most írjuk ki részletesen az (1) alatti sor j -edik részletösszegét (egyenlőre $j > n$ tetszőleges) és jelöljük p_j -vel a közös nevezőre hozás után a megfelelő számalót:

$$(2) \quad \frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + \frac{1}{10^{3!}} + \dots + \frac{1}{10^{j!}} = \frac{p_j}{10^{j!}}.$$

Nyilvánvaló, hogy

(3)

$$\begin{aligned} L_0 - \frac{p_j}{10^j!} &= \frac{1}{10^{(j+1)!}} + \frac{1}{10^{(j+2)!}} + \dots \leq \\ &\leq \frac{1}{10^{(j+1)!}} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots \right) < \\ &< \frac{2}{10^{(j+1)!}}, \end{aligned}$$

hiszen az utolsó sorban a zárójelben egy $a = 1$, $q = \frac{1}{10}$ paraméterű geometriai sor van. Ezek után tekintsük a $P(x)$ helyettesítési értékét a $\frac{p_j}{10^j!}$ helyen, és becsüljük azt a következőképpen:

$$(4) \quad \left| P\left(\frac{p_j}{10^j!}\right) \right| \leq K \left| \frac{p_j}{10^j!} - L_0 \right| \leq \frac{2K}{10^{(j+1)!}}$$

Itt azt használtuk ki, hogy ha x_0 gyöke a $P(x)$ polinomnak, akkor az $(x - x_0)$ gyöktényező kiemelhető, azaz

$$(5) \quad P(x) = (x - x_0)P_1(x),$$

ahol $P_1(x)$ szintén egy polinom, ami folytonos függvény lévén egy véges zárt intervallumon korlátos – és nyilvánvaló, hogy a $\frac{p_j}{10^j!}$ alakú értékek egy előre

kijelölhető véges zárt intervallumba esnek minden j esetén.

Ha tehát a $|P_1(x)|$ egy felső korlátját K -val jelöljük, és figyelembe vesszük, hogy x_0 gyanánt L_0 vehető, akkor valóban adódik a (4) alatti becslés.

Szorozzuk be most (4) mindkét oldalát $(10^{j!})^n$ -nel, és alkalmazzuk a (3)-ban szereplő becslést:

(6)

$$\begin{aligned} \left| (10^{j!})^n \cdot P\left(\frac{p_j}{10^{j!}}\right) \right| &\leq \frac{2K(10^{j!})^n}{10^{(j+1)!}} < \frac{2K(10^{j!})^n}{(10^{j!})^{n+1}} = \\ &= \frac{2K}{10^{j!}} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

ha $j \rightarrow \infty$ (az utolsó becslésnél azt használtuk ki, hogy $j > n$). Most ha $j \rightarrow \infty$, akkor a jobb oldalon $\frac{2K}{10^{j!}} \rightarrow 0$, így a bal oldalon levő sorozatnak is 0-hoz kell tartani, de mivel az a sorozat egész számokból áll (itt használtuk ki, hogy P n -edfokú egész együtthatós), ezért a sorozat tagjai valahonnan kezdve 0-val kell hogy egyenlőek legyenek, ami azt jelenti, hogy a $P(x)$ polinomnak végtelen sok zérushelye van (ugyanis a $\frac{p_j}{10^{j!}}$ értékek mind különbözőek (ld. (2)-t), ami ellentmondás, hiszen egy n -edfokú polinomnak csak véges sok zérushelye lehet.

Tehát L_0 valóban transzcendens szám.