Véges ponthalmazok és az általuk meghatározott távolságok

Hajnal Péter

Bolyai Intézet, TTIK, SZTE, Szeged

2019. március 23.

A kezdet

A kezdet

A kezdet

Erdős Pál

Budapest, 1913. március 26. – Varsó, 1996. szeptember 20.

Amer. Math. Monthly 53(1946), 248–250.

ON SETS OF DISTANCES OF n POINTS

P. ERDÖS, Stanford University

1. The function f(n). Let $[P_n]$ be the class of all planar subsets P_n of n points and denote by $f(n)$ the minimum number of different distances determined by its n points for P_n an element of $\{P_n\}$. Clearly, $f(3)=1$ (with the three points forming the vertices of an equilateral triangle) $f(4)=2$, $f(5)=2$. The following theorem establishes rough bounds for arbitrary n. Though I have sought to improve this result for many years, I have not been able to do so.

THEOREM 1. *The minimum number $f(n)$ of distances determined by n points of a plane satisfies the inequalities*

$$(n - 3/4)^{1/2} - 1/2 \leq f(n) \leq cn/(\log n)^{1/2}.$$

Proof. Let P_1 be an arbitrary vertex of the least convex polygon determined by the n points, and denote by K the number of different distances occurring

Pintér Lajos

Pintér Lajos

Pintér Lajos

Pintér Lajos
Arad, 1929. május 29. — Szeged, 2019. január 6.

Adott n pont a síkon

Definíció

Legyen $\mathcal{P}$ egy n elemű ponthalmaz a síkon. Vegyünk két különböző pontot $\mathcal{P}$-ből és határozzuk meg távolságukat. A kapott $\binom{n}{2}$ pozitív szám a *ponthalmazunk meghatározott távolságai*.

Adott n pont a síkon

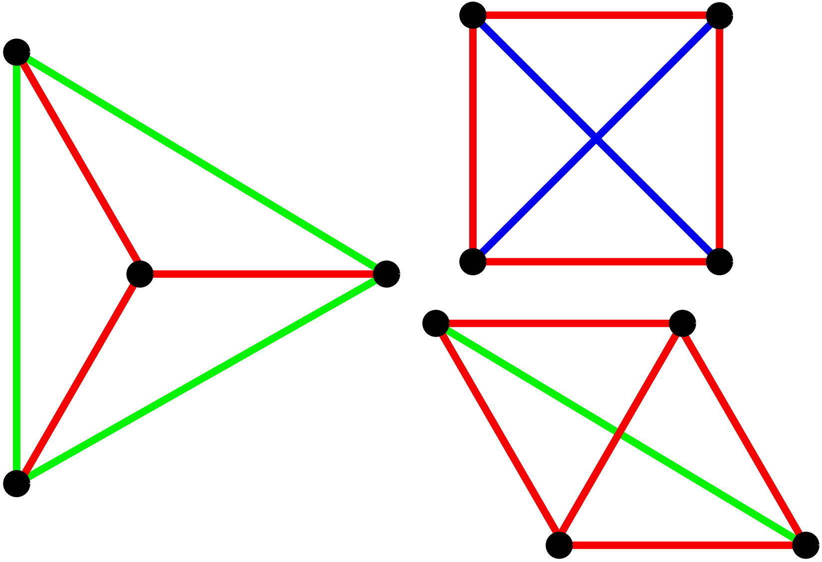
Definíció

Legyen $\mathcal{P}$ egy n elemű ponthalmaz a síkon. Vegyünk két különböző pontot $\mathcal{P}$-ből és határozzuk meg távolságukat. A kapott $\binom{n}{2}$ pozitív szám a *ponthalmazunk meghatározott távolságai*.

A távolságok nem szükségszerűen különbözők. Igazából a realizált értékek bizonyos multiplicitással értendők.

Példa 0

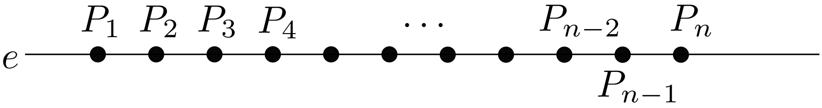
Példa 0



Példa I

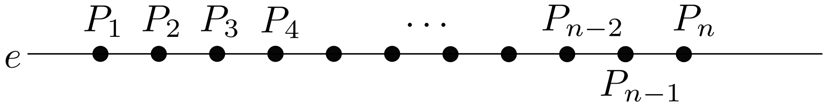
A számegyenes $1, 2, \ldots, n$ pontjai.

A számegyenes $1, 2, \ldots, \mathrm{n}$ pontjai.



Példa I

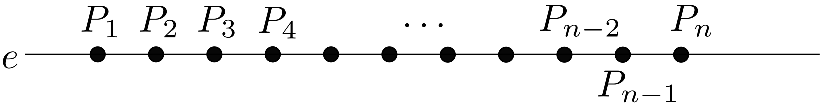
A számegyenes $1, 2, \ldots, n$ pontjai.



$n - 1$ különböző távolság: $1, 2, \ldots, n - 1$.

Példa I

A számegyenes $1, 2, \ldots, n$ pontjai.



$n - 1$ különböző távolság: $1, 2, \ldots, n - 1$.

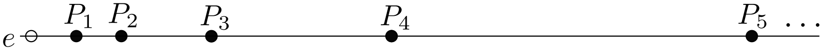
Az i távolság multiplicitása $n - i$.

Példa II

A számegyenes $1, 2, 4, 8, \ldots, 2^{n-1}$ pontjai.

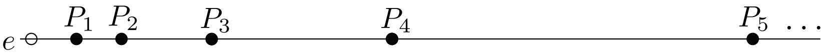
Példa II

A számegyenes $1, 2, 4, 8, \ldots, 2^{\mathrm{n}-1}$ pontjai.



Példa II

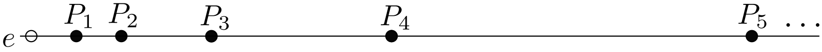
A számegyenes $1, 2, 4, 8, \ldots, 2^{n-1}$ pontjai.



$\binom{n}{2}$ különböző távolság. (Miért?)

Példa II

A számegyenes $1, 2, 4, 8, \ldots, 2^{n-1}$ pontjai.



$\binom{n}{2}$ különböző távolság. (Miért?)

Mindegyik távolság multiplicitása 1.

Az egyenes

Az egyenest kiaknáztuk.

Az egyenes

Az egyenest kiaknáztuk.

Az egyenesen n pont mindig legalább $n-1$ távolságot meghatároz. (Miért?)

Az egyenes

Az egyenest kiaknáztuk.

Az egyenesen n pont mindig legalább $n - 1$ távolságot meghatároz. (Miért?)

Ez a minimális távolság szám meg is valósítható.

Az egyenest kiaknáztuk.

Az egyenesen n pont mindig legalább $n-1$ távolságot meghatároz. (Miért?)

Ez a minimális távolság szám meg is valósítható.

A maximális távolság szám/$\binom{n}{2}$ is megvalósítható.

Az egyenes

Az egyenest kiaknáztuk.

Az egyenesen n pont mindig legalább $n-1$ távolságot meghatároz. (Miért?)

Ez a minimális távolság szám meg is valósítható.

A maximális távolság szám/$\binom{n}{2}$ is megvalósítható.

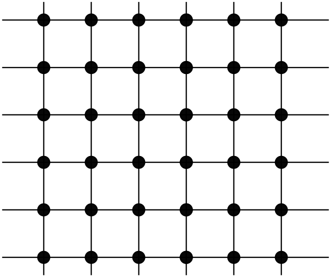
Az érdekes kérdés: Lépjünk ki a síkba! Konstruáljunk olyan ponthalmazt, amely minél kevesebb távolságot tartalmaz.

Példa III

6×6 négyzetrács 36 pontja.

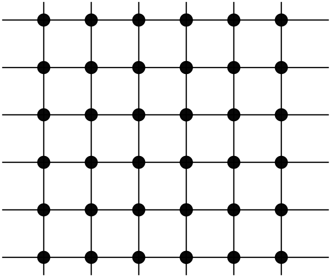
Példa III

6×6 négyzetrács 36 pontja.



Példa III

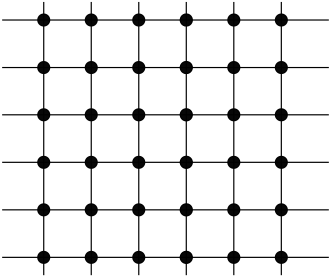
6×6 négyzetrács 36 pontja.



Különböző távolságok száma?

Példa III

6×6 négyzetrács 36 pontja.



Különböző távolságok száma?

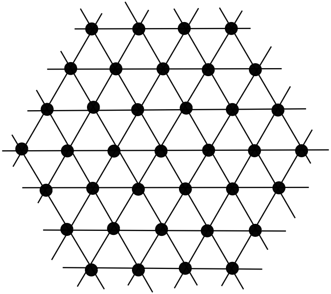
Multiplictások?

Példa IV

Egy háromszögrács pontjai.

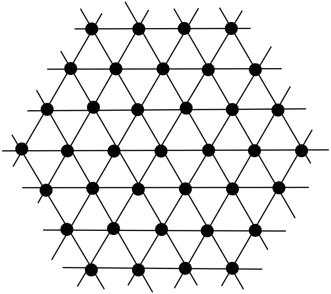
Példa IV

Egy háromszögrács pontjai.



Példa IV

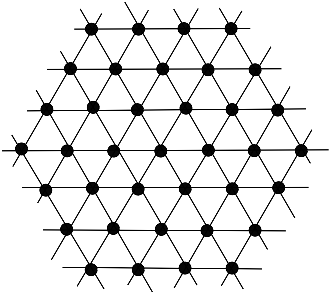
Egy háromszögrács pontjai.



Különböző távolságok száma?

Példa IV

Egy háromszögrács pontjai.



Különböző távolságok száma?

Multiplictások?

Az első nagy kérdés

Definíció

$$\text{KülTáv}(\mathcal{P}) = \left|\{\mathrm{d} : \ \mathrm{d} \text{ egy meghatározott távolság } \mathcal{P}\text{-ben}\}\right|.$$

Az első nagy kérdés

Definíció

$$\text{KülTáv}(\mathcal{P}) = \left|\{\mathrm{d}: \ \mathrm{d} \text{ egy meghatározott távolság } \mathcal{P}\text{-ben}\}\right|.$$

Definíció

$$\text{KülTáv}(\mathrm{n}) = \min\{\text{KülTáv}(\mathcal{P}) : |\mathcal{P}| = \mathrm{n}\}|.$$

Egy tétel

Tétel

$$\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{n}} \leq \mathsf{KülTáv}(\mathrm{n}).$$

Bizonyítás

Legyen $\mathcal{P}$ egy tetszőleges n elemű ponthalmaz a síkon. Legyen Δ a különböző távolságok száma.

Bizonyítás

Legyen $\mathcal{P}$ egy tetszőleges n elemű ponthalmaz a síkon. Legyen Δ a különböző távolságok száma.

Legyen A egy pont $\mathcal{P}$-ből. Rajzoljunk A körül Δ darab koncentikus kört, amelyek sugarai a $\mathcal{P}$ által meghatározott távolságok. Így ez a Δ darab kör lefedi az A-tól különböző $n-1$ pontot.

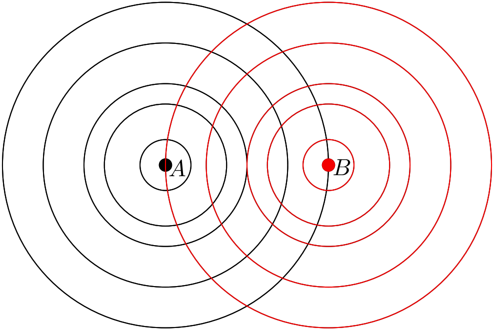
Bizonyítás

Legyen $\mathcal{P}$ egy tetszőleges n elemű ponthalmaz a síkon. Legyen Δ a különböző távolságok száma.

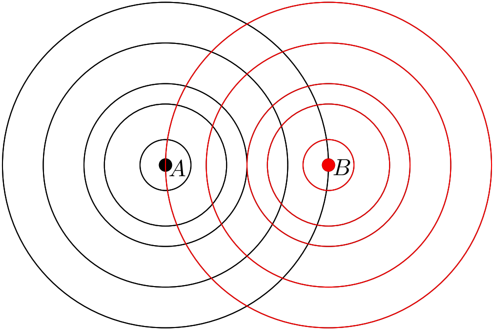
Legyen A egy pont $\mathcal{P}$-ből. Rajzoljunk A körül Δ darab koncentikus kört, amelyek sugarai a $\mathcal{P}$ által meghatározott távolságok. Így ez a Δ darab kör lefedi az A-tól különböző $\mathrm{n}-1$ pontot.

Legyen B egy A-tól különböző pont $\mathcal{P}$-ból. Ismételjük meg B körül is a fentieket.

Bizonyítás (folytatás)



Bizonyítás (folytatás)



Mindkét Δ körből álló rendszer lefedi az A-tól és B-től különböző $\mathrm{n}-2$ pontot. Azaz

$$\mathrm{n}-2 \leq 2 \cdot \Delta^2.$$

A dolgok állása

Tétel (Guth–Katz 2015, Erdős Pál 1946)

$$\frac{1}{100}\frac{n}{\log n} \le \mathsf{KülTáv}(n) \le 100\frac{n}{\sqrt{\log n}}.$$

A második nagy kérdés

Definíció

$$\text{EgyTáv}(\mathcal{P}) = |\{\{A, B\} \subset \mathcal{P} : d(A, B) = 1\}|.$$

Definíció

$$\mathsf{EgyTáv}(\mathcal{P}) = |\{\{A, B\} \subset \mathcal{P} : d(A, B) = 1\}|.$$

Definíció

$$\mathsf{EgyTáv}(n) = \mathsf{max}\{\mathsf{EgyTáv}(\mathcal{P}) : |\mathcal{P}| = n\}|.$$

Egységtávolságok gráfja

Definíció

Legyen $\mathcal{P}$ egy véges ponthalmaz. Pontjainkat csúcsoknak vesszük és két csúcsot akkor és csak akkor kötünk össze, ha egységtávolságra vannak egymástól. A kapott egyszerű gráfot a ponthalmaz egységtávolság-gráfjának nevezzük és $\mathrm{U}_{\mathcal{P}}$-vel jelöljük.

Lemma

Egy síkbeli ponthalmaz egységtávolság gráfja nem tartalmaz négy páronként összekötött pontot/négy elemű klikket.

Bizonyítás

Indirekt módszer: Tegyük fel, hogy mégis van négy páronként összekötött pontunk A, B, C és D. A maradék csak „ellentmondás vadászat”.

Bizonyítás

Indirekt módszer: Tegyük fel, hogy mégis van négy páronként összekötött pontunk A, B, C és D. A maradék csak „ellentmondás vadászat”.

A és B összekötött, tehát egységtávolságra vannak.

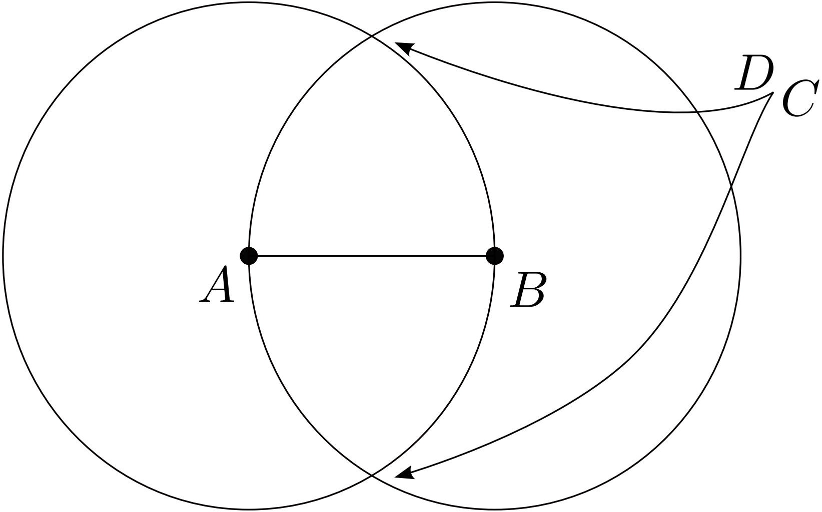
Bizonyítás

Indirekt módszer: Tegyük fel, hogy mégis van négy páronként összekötött pontunk A, B, C és D. A maradék csak „ellentmondás vadászat”.

A és B összekötött, tehát egységtávolságra vannak.

Hol lehet C és D? Éppen van nekik hely. DE!!!

Bizonyítás ábrán



Egy szabadulószoba honlapja

Van négy hajóm egymástól mind 100–100 méterre, egy három evezősoros gálya, egy két árbócos vitorlás, és egy csatahajó. Mi a negyedik?

Hétköznapi nyelvezet

Egy szabadulószoba honlapja

Van négy hajóm egymástól mind 100–100 méterre, egy három evezősoros gálya, egy két árbócos vitorlás, és egy csatahajó. Mi a negyedik?

ELTE szakdolgozat

A tengeren négy hajó halad együtt, közel egymáshoz: bármely két hajó távolsága 3 km. A hajók között van teherszállító, olajszállító és utasszállító hajó. Milyen hajó a negyedik?

Egy tétel eredete

Egy matematikai kérdés

Hány éle lehet egy n pontú egyszerű gráfnak, ha nincs benne négy páronként összekötött csúcs?

A válasz

1. Válasz: „Sok.”

A válasz

1. Válasz: „Sok."

2. válasz (Turán Pál): [Az egyszerűség kedvéért tegyük fel $3|\mathrm{n}$.] Osszuk három egyenlő elemszámú halmazba/részbe a csúcsokat. Két csúcs akkor és csak akkor összekötött, ha különböző részhez tartoznak. Ez $\mathrm{n}^2/3$ él, ennyi élünk lehet. Több NEM.

OKTV II. forduló, 1980

Egy kétkarú mérlegen $kn+1$ darab golyó tömegét hasonlítjuk össze (k, n pozitív egészek). A golyókat minden lehetséges párosításban a mérlegre téve azt tapasztaljuk, hogy a mérleg

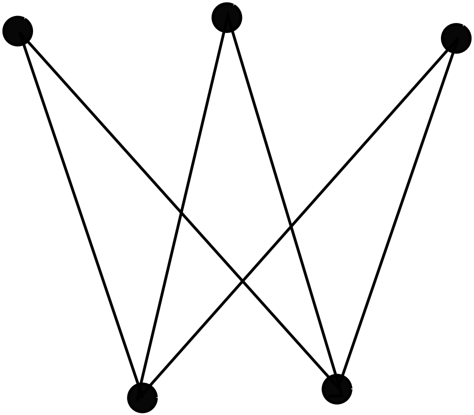
$$b = \binom{k}{2} n^2 + (k-1)n + 1$$

esetben billen ki (a feltett két golyó különböző tömegű; egy golyópárt csak egyszer helyezünk rá a mérlegre). Bizonyítsuk be, hogy a golyók között van legalább $k+1$ különböző tömegű! Igaz-e ez az állítás akkor is, ha a mérleg csak $b-1$ esetben billen ki?

Vissza a matematikai nyelvezethez

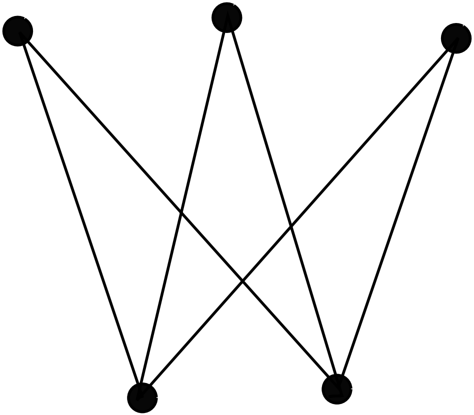
Egy síkbeli ponthalmaz egységtávolság gráfja nem tartalmaz $\mathrm{K}_{2,3}$ részgráfot.

Egy síkbeli ponthalmaz egységtávolság gráfja nem tartalmaz $K_{2,3}$ részgráfot.



Vissza a matematikai nyelvezethez

Egy síkbeli ponthalmaz egységtávolság gráfja nem tartalmaz $\mathrm{K}_{2,3}$ részgráfot.



„Három ház—kettő kút” gráf.

Gráfelmélet

Tétel

Legyen G egy n csúcsú egyszerű gráf, amely nem tartalmaz $K_{2,3}$ részgráfot. Ekkor G éleinek száma legfeljebb

$$2 \cdot n^{3/2}.$$

Egy jó elindulás

Hány egy csúcsból induló élpár lehet $\mathbb{G}$-ben?

Egy jó elindulás

Hány egy csúcsból induló élpár lehet G-ben?

Pontosan
$$\sum_{\mathrm{v}:\mathrm{v}\in\mathrm{V}} \binom{\mathrm{d}(\mathrm{v})}{2}.$$

Egy jó elindulás

Hány egy csúcsból induló élpár lehet G-ben?

Pontosan

$$\sum_{\mathrm{v}:\mathrm{v}\in\mathrm{V}} \binom{\mathrm{d}(\mathrm{v})}{2}.$$

Legfeljebb

$$2 \cdot \binom{\mathrm{n}}{2}.$$

Fordítás

Geometriai motiváció.

Fordítás

Geometriai motiváció.

Kombinatorikus kérdés.

Fordítás

Geometriai motiváció.

Kombinatorikus kérdés.

A kombinatorikus kérdés megoldása a kombinatorikán belül.

Fordítás

Geometriai motiváció.

Kombinatorikus kérdés.

A kombinatorikus kérdés megoldása a kombinatorikán belül.

A kombinatorikus válasz geometriai értelmezése.

Fordítás

Geometriai motiváció.

Kombinatorikus kérdés.

A kombinatorikus kérdés megoldása a kombinatorikán belül.

A kombinatorikus válasz geometriai értelmezése.

Tétel

Egy n elemű síkbeli ponthalmaz legfeljebb $2n^{3/2}$ egységtávolságot határoz meg.

A dolgok állása

Tétel (Erdős Pál 1946, Spencer–Szemerédi–Trotter 1984)

$$\frac{1}{100} n^{1+1/\log\log n} \le \mathrm{EgyTáv}(n) \le 100 n^{4/3}.$$

Unalmas, színezzük ki

Probléma (Hadwiger—Nelson)

Színezzük ki a sík pontjait minél kevesebb színnel úgy hogy az egységtávolságra lévő pontpárok két különböző színt kapjanak.

Unalmas, színezzük ki

Probléma (Hadwiger—Nelson)

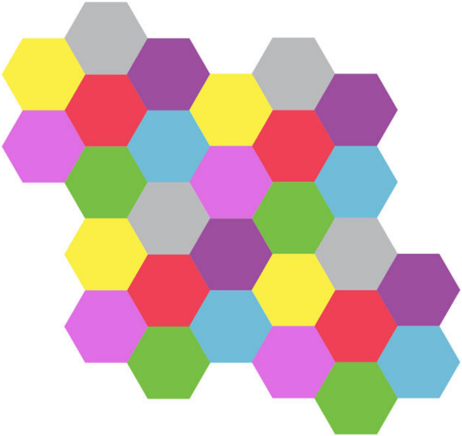
Színezzük ki a sík pontjait minél kevesebb színnel úgy hogy az egységtávolságra lévő pontpárok két különböző színt kapjanak.

Erdős Pál, Leo és William Moser, Hugo Hadwiger, Martin Gardner, Heiko Harborth, Solomon W. Golomb, Edward Nelson (1950, egyetemi hallgató), John Isbell, Victor Klee, William T. Tutte, ...

Hét szín elég

Bizonyítás:

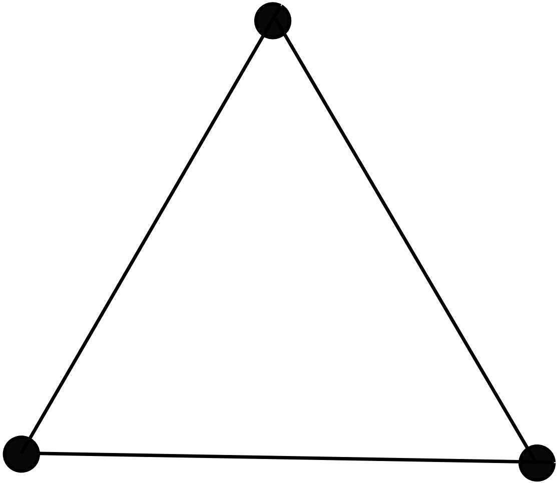
Bizonyítás:



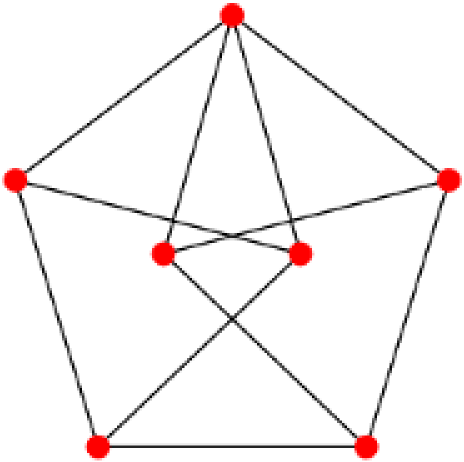
Kettő szín nem elég

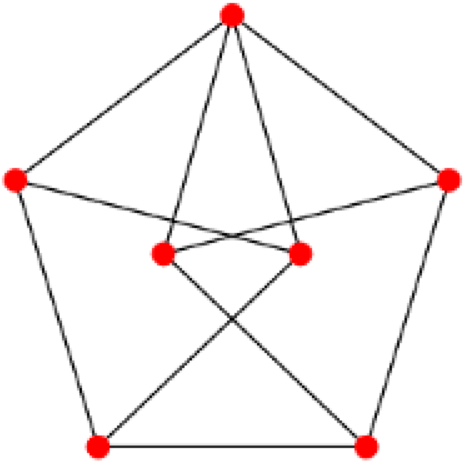
Bizonyítás:

Bizonyítás:



Három szín nem elég





Moser—Moser-orsó.

Négy szín nem elég

Nem bizonyítjuk.

Négy szín nem elég

Nem bizonyítjuk.

Friss.

Négy szín nem elég

Nem bizonyítjuk.

Friss.

Aubrey de Grey, 2018. április 8.

A sík kromatikus száma legalább 5.

Négy szín nem elég

Nem bizonyítjuk.

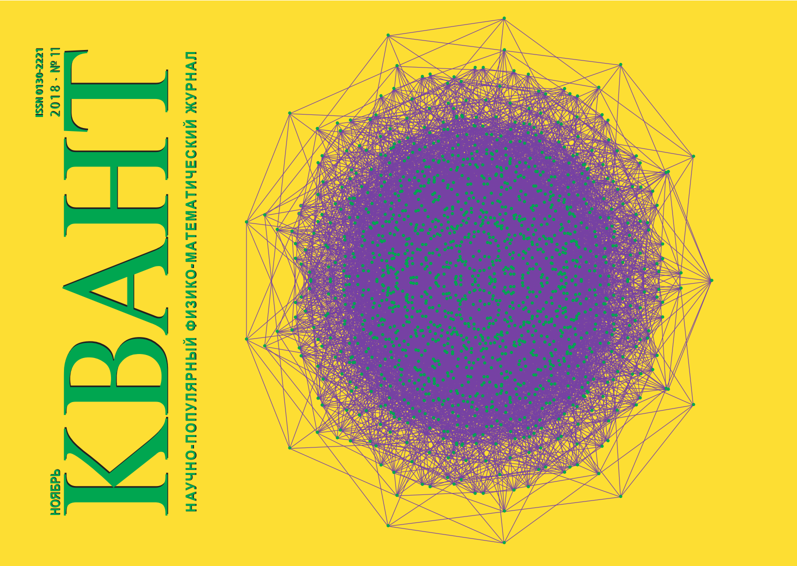
Friss.

Aubrey de Grey, 2018. április 8.

A sík kromatikus száma legalább 5.

Igazából nem értjük a bizonyítást.

Pintér Tanár úr másik kedvenc lapja


ISSN 0130-2221
2018 · № 11
НОЯБРЬ
КВАНТ
НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Merre tovább?

Sok kérdés marad azoknak is, akik még csak az általános iskolai padokat koptatják.

Köszönöm a figyelmet!