XXV. Hajnal Imre Matematika Tesztverseny-2022

I. kategória megoldások

1. Mennyi a $\sqrt{121}$ -nél kisebb (pozitív) prímszámok összege?

A) 15 B) 12 C) 17 D) 18 E) más válasz

$\sqrt{121} = 11$, az ennél kisebb pozitív prímek összege: $2 + 3 + 5 + 7 = 17$

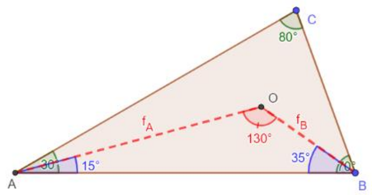
Megjegyzés: az 1 nem prímszám, és vannak negatív prímek is.

C

2. Az ABC háromszögben $ABC\sphericalangle = 70^{\circ}$ és $ACB\sphericalangle = 80^{\circ}$. Mekkora szög alatt látszik a háromszög legnagyobb oldala a háromszögbe írható kör középpontjából?

A) 70° B) 80° C) 30° D) 130° E) más válasz

A háromszögbe írható kör középpontja a szögfelezők metszéspontja: $f_A \cap f_B = O$. Mivel $CAB\sphericalangle = 180^{\circ} - 70^{\circ} - 80^{\circ} = 30^{\circ}$, ezért a legnagyobb oldal az AB oldal (a legnagyobb, 80°-os szöggel szemben van). A háromszög belső szögeinek összegét és a szögek felezését is figyelembe véve $AOB\sphericalangle = 180^{\circ} - 15^{\circ} - 35^{\circ} = 130^{\circ}$



D

3. Hány darab $\overline{abc}$ alakú, tízes számrendszerbeli háromjegyű szám van, amely esetén az $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ összeg négyzetszám?

A) 1 B) 9 C) 11 D) 12 E) más válasz

Az $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ összeget felírhatjuk a következő módon is: $(100a + 10b + c) + (100b + 10c + a) + (100c + 10a + b) = 111(a + b + c) = 3 \cdot 37(a + b + c)$. Ahhoz, hogy ez a szám négyzetszám legyen, igaznak kell, legyen: $37|(a + b + c)$. De ez nem lehet igaz, mert az $a + b + c$ maximális értéke $27 < 37$, így nincs olyan $\overline{abc}$ alakú, tízes számrendszerbeli háromjegyű szám, amely megfelelne a fenti feltételnek.

E

4. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amely 15-tel osztva 13-at, 17-tel osztva 15 maradékot ad?

A) 253 B) 255 C) 258 D) 508 E) más válasz

Jelöljük ezt a legkisebb számot n-nel! A feltételek miatt az $n + 2$ osztható 15-tel és 17-tel is. Mivel $(15; 17) = 1$ (relatív prímek), ezért $15 \cdot 17|(n + 2)$. Mivel a legkisebbet keressük, ezért: $15 \cdot 17 = (n + 2) \Longrightarrow 255 = n + 2$, amiből $n = 253$.

Ellenőrzéssel meggyőződhetünk, hogy a 253 megfelel a feltételeknek.

A

5. Egy szabályos dobókockával háromszor dobunk egymás után. A dobott pontszámokat a dobás sorrendjében leírjuk egymás mellé, így a három dobás után kapunk egy háromjegyű számot. Az így felírható (kidobható) háromjegyű számok között hány olyan van, amelyben a számjegyek összege 7?

A) 24 **B) 10** **C) 6** **D) 15** **E) más válasz**

A szabályos dobókockán szerepelnek: $1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6$. A 6-os nem jöhet szóba, mert a másik két dobás összege nem lehet 1, mivel nincs 0.

A lehetséges eseteket foglaljuk táblázatba egy lehetséges rendszer szerint:

Első számjegy **1**-es	Első számjegy **2**-es	Első számjegy **3**-as	Első számjegy **4**-es	Első számjegy **5**-ös
115	**2**14	**3**13	**4**12	**5**11
151	**2**41	**3**31	**4**21	-
124	**2**23	**3**22	-	-
142	**2**32	-	-	-
133	-	-	-	-
5 db	4 db	3 db	2 db	1 db
Összesen: 15 db				

D

6. Gondoltam egy egész számra, majd a számhoz hozzáadtam a négyzetét Az így kapott összegre melyik állítás biztosan nem teljesül?

A) osztható 7-tel **B) végződése 5** **C) prímszám**

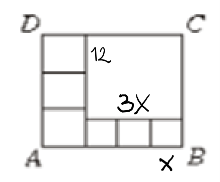
D) nem negatív **E) páros**

Ha a gondolt számot n-nel jelöljük, akkor a feltételből az összeg $n + n^2$, amit szorzattá alakíthatunk: $n(n+1)$. Ebből a formátumból látszik, hogy az összeg felírható két egymást követő egész szám szorzataként, ami biztosan páros, ami nem végződhet 5-re.

Megjegyzés: a többi feltételt nem szükséges vizsgálni, mert a versenykiírás szerint pontosan egy helyes válasz van, de mindegyikre lehet egy-egy példát találni, pl.: $7|7+7^2 = 56;\ 1+1^2 = 2$ prím; $2+2^2 \geq 0$; $3+3^2 = 12$ páros. A gondolt szám előjele (esetleg 0) nem befolyásolja a megoldást.

B

7. **Az $ABCD$ téglalapot az ábrán látható módon hét olyan négyzetre bontottuk fel, melyek közül három-három darab egybevágó. Mennyi az $ABCD$ téglalap területe, ha $AD = 36$ cm?**



A) 1440 cm² **B) 1404 cm²** **C) 1943 cm²** **D) 1800 cm²** **E) 1584 cm²**

Jelöljük a legkisebb négyzet (a B csúcsból balra induló három db) oldalát x-szel!

A középső oldalhosszúságú (a D csúcsból lefelé induló három db) négyzet oldala az ábra alapján: $\frac{AD}{3} = \frac{36}{3} = 12$ cm.

A legnagyobb négyzet (a C csúcsnál lévő egy db) oldala így az ábra alapján $3x$ lesz, de ez megegyezik $36 - x$-szel is ($BC - x$), amiből $3x = 36 - x \Longrightarrow x = 9$ cm $\Longrightarrow BC - x = 27$ cm.

Az $ABCD$ téglalap területe:
$T_{ABCD} = 3 \cdot 9^2 + 27^2 + 3 \cdot 12^2 = (3 \cdot 12)(12 + 3 \cdot 9) = 36 \cdot 39 = 1404$ cm²

B

8. **Egy kijelzőn a négy egymás melletti gombon két mosolygós és két szomorú „arc" látható az ábrán megadott sorrendben. Ha megnyomunk a négy közül egy gombot, akkor a rajta levő arc átvált az ellenkezőjére, akárcsak a gombbal szomszédos gomb(ok)on levő arc(ok). Legkevesebb hány gombnyomással érhető el, hogy mind a négy gombon mosolygós arc legyen?**

A) 2 **B) 4** **C) 6** **D) 5** **E) 3**

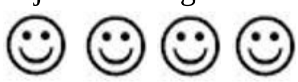
Egy lehetőség minimális gombnyomással:

Alaphelyzet:

Balról a második gomb megnyomása után:

Balról a harmadik gomb megnyomása után:

A jobb oldali gomb megnyomása után a kívánt helyzet áll elő:



Megjegyzések: a gombok egyenkénti megnyomásával kipróbálható, hogy egy gombnyomás nem elegendő. Ennek folytatásaként hasonló módon, bár egy kicsit tovább tart, azt is meg lehet mutatni, hogy két lépés sem elegendő.

Általánosan ez a rész (a 2 lépés nem elegendő) *Pálinkás István* rendkívül elegáns ötlete alapján a következőképpen bizonyítható:
Ha szélső gombot (1. vagy 4.) nyomunk meg, akkor a vidám arcok számának a paritása nem változik (0 vagy ± 2), de ha közbülső gombot nyomok meg (2. vagy 3.), akkor megváltozik a paritása (± 3 vagy ± 1). A kezdőállapotban 2 db vidám arc van: ha ebből két lépésben el lehet jutni 4 vidám arcig, akkor azt csak úgy lehet, ha két szélső vagy két közbülső gombot nyomunk meg. Tekintve, hogy ugyanazt a gombot nincs értelme többször megnyomni, az 1. és 4. vagy 2. és 3. gombnyomás kombinációk jöhetnek szóba, de a sorrendek változtatását is figyelembe véve, egyik sem hozza a kívánt eredményt.

E

9. **Egy dobozban almák és körték vannak. Ugyanannyi alma kukacos, mint amennyi körte. Az almák kétharmada, a körték háromnegyede nem kukacos. A dobozban levő gyümölcsök hányad része nem kukacos?**

A) ötheted **B) ötnyolcad** **C) héttized** **D) négyötöd** **E) más válasz**

Jelöljük az almák számát a-val, a körték számát k-val, a kukacos gyümölcsök számát fajtánként x-szel!

Nem kukacos almák száma: $\frac{2}{3}a = 2x \Longrightarrow a = 3x$

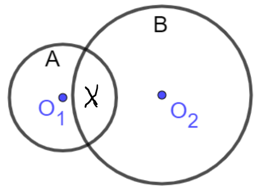
Nem kukacos körték száma: $\frac{3}{4}k = 3x \Longrightarrow k = 4x$

A nem kukacos gyümölcsök aránya az összes gyümölcshöz viszonyítva:

$$\frac{2x + 3x}{3x + 4x} = \frac{5x}{7x} = \frac{5}{7}$$

A

10. **Az A és B halmazok Venn-diagramja az ábrán látható módon két, az O_1, illetve O_2 középpontú, 3 cm, illetve 5 cm sugarú kör. Mennyi a $B \setminus A$ és az $A \setminus B$ halmazokat „jelölő” alakzatok területeinek különbsége?**



A) 16π cm² **B) 20π cm²** **C) 18π cm²** **D) 22π cm²** **E) más válasz**

Jelöljük a két halmaz közös részének területét x-szel ($T_{A \cap B}$)!

A kör területképletét ($T_k = r^2\pi$) és az adatokat felhasználva: $T_A = 9\pi$ cm² és $T_B = 25\pi$ cm²

Az szóban forgó alakzatok területeinek különbsége (nagyobból kivonva a kisebbet):

$T_{B \setminus A} - T_{A \setminus B} = (25\pi - x) - (9\pi - x) = 16\pi$ cm²

Megjegyzés: Ugyan a feladat nem tett említést arról, hogy melyik területből kell kivonni a másikat, de a megoldásokban csak pozitív érték szerepel, így értelemszerűen a nagyobb területből kellett kivonni a kisebbet.

A

11. **Ha x és y tetszőleges valós szám, akkor mennyi az $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 13$ kifejezés legkisebb helyettesítési értéke?**

A) 0 **B) -15** **C) 13** **D) -12** **E) más válasz**

Alakítsuk át a szóban forgó másodfokú, kétváltozós $(x; y)$ kifejezést teljes négyzetes formára (binómok négyezetei összegére), felhasználva a két tag összegének vagy különbségének közismert $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ szabályait! Kapjuk:

$$x^2 + y^2 - 8x + 6y + 13 = x^2 - 8x + y^2 + 6y + 13 = (x-4)^2 - 16 + (y+3)^2 - 9 + 13 =$$
$$= \underbrace{(x-4)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(y+3)^2}_{\geq 0} - 12$$

A háromtagú összeg akkor lesz minimális, ha az első két nemnegatív tag 0 értéket vesz fel. Kérdés még, hogy fel tudja-e venni ez a két tag a 0 értéket. Igen. Ezt a 0 értéket a tagok $x = 4$, illetve $y = -3$ esetén fel is veszik, így a kifejezés minimális értéke: -12

D

12. Adott a síkon a koordinátáikkal megadott négy pont: $A(\sqrt{2};\sqrt{8})$; $B(2+\sqrt{3};\sqrt{3})$; $C(2-\sqrt{2};\sqrt{2})$; $D(\sqrt{2}+\sqrt{3};\sqrt{6}-2)$. Ezen pontok között hány olyan van, melynek koordinátái összege és különbsége is racionális szám?

A) 4 **B) 1** **C) 2** **D) 3** **E) 0**

Az összegek és különbségek vizsgálatánál használjuk fel, hogy a szóban forgó irracionális számok összege, racionális számokkal való szorzata, racionális számokkal vett összege és különbsége is irracionális szám!

Az A pont koordinátáinak összege $\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{2}+2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$, különbsége pedig $\sqrt{2}$, mindkettő irracionális. Az A pont nem felel meg a feltételnek.

Igaz, a B pont koordinátáinak különbsége $2+\sqrt{3}-\sqrt{3}=2$, ami racionális, de a koordinátáinak összege $2+\sqrt{3}+\sqrt{3}=2+2\sqrt{3}$, ami irracionális. A B pont nem felel meg a feltételnek.

Igaz az is, hogy a C pont koordinátáinak összege $2-\sqrt{2}+\sqrt{2}=2$ szintén racionális, de a koordinátáinak különbsége $2-\sqrt{2}-\sqrt{2}=2-2\sqrt{2}$ irracionális. Így a C pont sem felel meg a feltételnek.

A D pont koordinátáinak összege $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}-2$ irracionális, a különbsége pedig $\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}+2$ szintén irracionális. A D pont nem felel meg a feltételnek.

Tehát a négy pont közül egyik sem felel meg a feltételeknek.

Megjegyzések: természetesen minden pont esetében elegendő csak azt belátni, hogy vagy az összeg, vagy a különbség irracionális. A különbség vizsgálatánál nem fontos az, hogy melyik koordinátából vonjuk ki a másikat, mert felcserélt esetben csak a különbség előjele változik, a szám racionális-irracionális mivolta nem. Természetesen irracionális számok összege ($-\sqrt{2}+\sqrt{2}=0$) és szorzata ($\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$) lehet racionális, de ezekben az esetekben ilyenekről nem volt szó.

E

13. Egy telefonos játékban, ha megnyomjuk a * gombot, akkor a $3x3$-as táblázatunk, melynek minden cellájában kezdetben a 0 állt, egy véletlenszerűen kiválasztott $2x2$-es összefüggő tartományában lévő minden cella értéke 1-gyel megnövekszik. Hányszor nyomtuk meg eddig a * gombot, ha a kijelzőn a következőt látjuk?

6	13	7
15	27	12
9	14	5

A) 11 **B) 27** **C) 24** **D) 16** **E) más válasz**

Mivel a $3x3$-as táblázatunk négy „sarkában” lévő egy-egy cella csak az ezeket a cellákat tartalmazó $2x2$-es összefüggő tartománynak eleme (semelyik ilyen metszetbe nem tartozik), így minden gombnyomásra közülük valamelyik cella értéke növekszik eggyel. Ebből következik, hogy az ezekben a cellákban (sarkoknál) lévő számok összege pontosan azt mutatja meg, hogy a (*) gombot hányszor nyomtuk meg: $6+7+5+9=27$

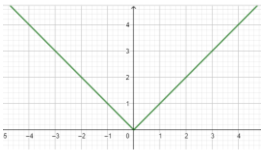
Észrevehetjük azt is, hogy a $3x3$-as táblázatunk középső cellája egyedül eleme mindegyik $2x2$-es összefüggő tartománynak, így a $(*)$ gomb megnyomásakor ebben a cellában mindig eggyel nő az érték, így a benne szereplő szám a $(*)$ gomb megnyomásainak számával egyenlő, ami szintén 27. (*Pálinkás István* ötlete alapján)

B

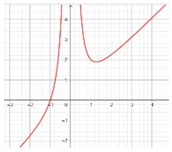
14. Hány olyan, a valós számok legbővebb részhalmazán értelmezett függvény van az alábbiak között, amelyiknek az értékkészlete csak pozitív valós számokat tartalmaz?

$$\boldsymbol{f(x) = |x|;\quad g(x) = x + \frac{1}{x^2};\quad h(x) = \frac{2\sqrt{x+3}}{1+x^2};\quad i(x) = \frac{1}{x+4}}$$

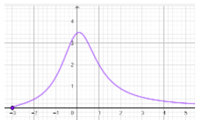
A) 1 **B) 2** **C) 3** **D) 4** **E) 0**



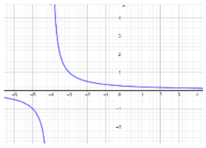
$\text{É}K_f = \{y \geq 0\}$



$\text{É}K_g = R$



$\text{É}K_h = \{y \geq 0\}$



$\text{É}K_i = R \setminus \{y = 0\}$

Az értékkészleteket (ÉK) nézve egyik függvény sem felel meg a feltételnek, vagyis az értékkészletükben nem csak pozitív valós szám van (a 0 nem pozitív).

Megjegyzés: nem elvárás, csak segít, tájékoztató jellegű a grafikonok megrajzolása, azokról a pontos választ rendszerint nem lehet leolvasni. A precíz bizonyításhoz elengedhetetlen az alkotó (elemi) függvények és a műveletek tulajdonságainak a vizsgálata. Ezt most itt nem volt elvárás.

E

15. Anna és Barbi együtt 30 évesek, Barbi és Cili életkorának összege pedig 34 év. A három barátnő együtt összesen 48 éves. Hány éves az életkoruk szerinti középső lány?

A) 18 **B) 16** **C) 12** **D) 14** **E) más válasz**

Jelöljük a barátnők életkorait nevük kezdőbetűivel: $A;\ B;\ C$

$$A + B = 30$$

$$B + C = 34$$

$$A + B + C = 48$$

Ha a harmadik összegből kivonjuk az második összeget: $A = 14$

Ha a harmadik összegből kivonjuk az első összeget: $C = 18$

Felhasználva az $A = 14$ és $C = 18$ értékét, figyelembe véve a barátnők együttes életkorát is (48 év), kapjuk, hogy $B = 16$.

A három barátnő közül az életkoruk szerint középső lány Barbi 16 éves.

A kapott számokat az eredeti kapcsolatokba visszahelyettesítve, megállapíthatjuk, hogy helyes eredményt kaptunk (ezt most nem kellett megcsinálni).

Megjegyzés: a feladat megoldásához természetesen nem szükséges az egyenletrendszerek megoldásának ismerete, tisztán logikai úton, szemléletes lépésekkel el lehet jutni a végeredményhez.

B

16. Az 1; 2; 5; 8 és 9 számjegyek felhasználásával képezzük az összes, különböző számjegyekből álló ötjegyű számot, majd ezeket a számokat egy növekvő sorozatba rendezzük! Melyik ötjegyű szám lesz a sorozat 52. tagja?

A) 29851 B) 51298 C) 51892 D) 52189 E) más válasz

Kezdjük el felírni növekvő sorrendben!

	Legkisebb:	Legnagyobb:	Darabszám
1-essel kezdődik:	12589	19852	24
2-essel kezdődik	21589	29851	24
49. tag: 51289	50. tag: 51298	51. tag: 51829	52. tag: 51892

C

17. Hány legalább kételemű részhalmaza van az $\{x; y; e; f\}$ négyelemű halmaznak?

A) 6 B) 8 C) 12 D) 11 E) más válasz

Egyszerűen felírjuk a feltételnek megfelelő elemszámú részhalmazokat, és megszámláljuk őket:

Kételeműek: $\{x; y\}$; $\{x; e\}$; $\{x; f\}$; $\{y; e\}$; $\{y; f\}$; $\{e; f\}$ 6 db

Háromeleműek: $\{x; y, e\}$; $\{x; y; f\}$; $\{x; e; f\}$; $\{y; e; f\}$ 4 db

Négyelemű: $\{x; y; e; f\}$ 1 db

Összesen: 11 db

D

18. Hány olyan ötjegyű (palindrom) szám van, amit „visszafele" olvasva, az eredeti számot „kapjuk vissza" (azaz hány darab ötjegyű palindrom szám van)?

A) 729 B) 810 C) 900 D)1000 E) 1956

Az egyesek és tízezresek helyén azonos számjegynek kell lenni, és az első hely miatt nem lehet 0, így 9 lehetőség van. Ha a 0-t is megengednénk itt, akkor legfeljebb négyjegyű számot kapnánk.

A tízesek és ezresek helyén szintén azonos számjegynek kell lenni, de itt minden számjegy szerepelhet, így ez 10 lehetőség.

A százasok helyén is minden számjegy szerepelhet, így ez is 10 lehetőség.

Az összes lehetőségek száma: $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$

Tehát 900 db ötjegyű palindrom szám van.

C

19. **Verica hétfőn egy zacskónyi mogyorót kapott születésnapja alkalmából, melynek $\frac{1}{3}$ részét még aznap el is fogyasztotta. Kedden megette a megmaradt mennyiség $\frac{1}{2}$ részét, szerdán pedig a zacskóban maradt mogyorók $\frac{1}{5}$ részét. Csütörtökön a maradék $\frac{1}{4}$ részét ette meg, pénteken pedig mindet, ami a zacskóban még megmaradt. Az eredeti mogyoró mennyiségének hányad részét ette meg Verica pénteken?**

A) $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{1}{5}$ **C)** $\frac{1}{10}$ **D)** $\frac{2}{15}$ **E) más válasz**

Jelöljük a Verićának adott zacskó mogyoró mennyiségét z-vel, és foglaljuk táblázatba a fogyasztások folyamatát!

	Elfogyasztott:	Maradt még:
Hétfőn:	$\frac{1}{3}z$	$\frac{2}{3}z$
Kedden:	$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}z=\frac{1}{3}z$	$\frac{2}{3}z-\frac{1}{3}z=\frac{1}{3}z$
Szerdán:	$\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}z=\frac{1}{15}z$	$\frac{1}{3}z-\frac{1}{15}z=\frac{4}{15}z$
Csütörtökön:	$\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{15}z=\frac{1}{15}z$	$\frac{4}{15}z-\frac{1}{15}z=\frac{1}{5}z$
Pénteken:	$\frac{1}{5}z$	0

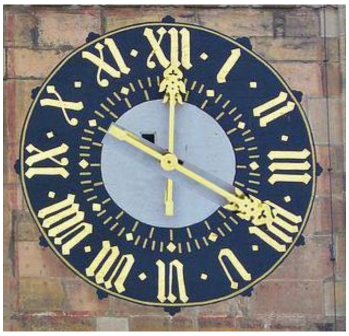
A táblázatból látszik, hogy Verica pénteken a teljes mennyiség egyötödét fogyasztotta el.

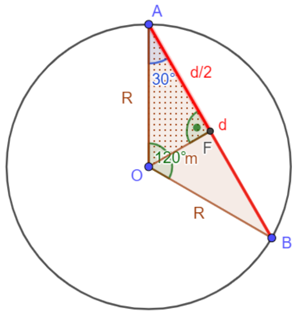
B

20. Egy toronyóra nagymutatója 120 cm hosszú. A tréfás órás délben a nagymutató végére illesztett egy kis kabala figurát. Az alábbi értékek közül melyik van a legközelebb a kabala figura déli és a húsz perccel későbbi helyzetének pontos távolságához?

A) 168 cm B) 195 cm C) 154 cm D) 208 cm E) 215 cm

Hogyan is nézne ki egy képzeletbeli toronyóra nagymutatója a kérdéses állapotokban egy valódi óra számlapján (a valóságban egyszerre nem látjuk így a mutatókat)? Ez alapján készítsünk egy ábrát a szükséges geometriai adatok feltüntetésével!





A feladat valójában nem más, mint a jobb oldali ábrán látható egyenlő szárú AOB háromszög $AB = d$ alapjának a kiszámítása. Az AOB háromszög szárai $OA = OB = R = 120$ cm, és a 20 perc eltelte miatt az $AOB\measuredangle = 120^{\circ}$.

Húzzuk meg az O-ból induló m magasságvonalat! Az egyenlő szárú háromszög és a magasságvonal tulajdonságai alapján m felezi az $AOB\measuredangle$-et és az AB-t is (F). A háromszög belső szögeinek összegét is felhasználva az AOF háromszög félszabályos háromszög (30°; 60°; 90°). Felhasználva az ilyen háromszögek azon (a háromszög tengelyes tükrözésével igazolható) tulajdonságát, hogy a 30°-kal szembeni befogó (m) az árfogó (R) fele. Így $m = 60$ cm. Ezt az adatot ismerve, az AOF derékszögű háromszögre alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt, majd a végén a kívánt pontossággal kerekítsünk:

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 + 60^2 = 120^2$$

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 = 10800$$

$$\frac{d}{2} = \sqrt{10800}$$

$$d = 2\sqrt{10800} \approx 208 \text{ cm (egész cm-re kerekítve)}$$

D

21. Három négyzet területének aránya $9 : 16 : 25$. A három négyzet kerületének összege 144 m. Hány méter a legnagyobb és a legkisebb négyzet kerületének különbsége?

A) 24 **B) 16** **C) 25** **D) 9** **E) más válasz**

A feladat feltételeit felírva $T_1 : T_2 : T_3 = 9 : 16 : 25$, amiből az következik, hogy a kerületek aránya $k_1 : k_2 : k_3 = 3 : 4 : 5$ (konkrét példákkal „igazolható”, ismert összefüggés).

Így a megszokott jelölést használva: $k_1 = 3x$, $k_2 = 4x$ és $k_3 = 5x$ (a kerületek x-nek megfelelő egész számú többszörösei)

Mivel a kerületek összeg $K = k_1 + k_2 + k_3 = 3x + 4x + 5x = 12x = 144$, ezért $x = 12$

A legnagyobb és legkisebb kerület különbsége: $k_3 - k_1 = 5x - 3x = 2x = 24$ m

A

22. Pisti és Viki kártyáztak. A játék előtt megegyeztek abban, hogy minden parti megnyeréséért a győztes 10 petákot kap a vesztestől, illetve, hogy az utolsó parti után fogják rendezni a tartozásokat. Pisti 3 partit nyert összesen, és a játék végén 70 petákot adott Vikinek. Hány partit játszottak összesen, ha nem volt döntetlen?

A) 14 **B) 7** **C) 10** **D) 13** **E) más válasz**

Jelöljük Pisti vesztes partijainak számát v-vel! Mivel Pisti 3 partit is nyert, így felírhatjuk Pistinek a partik utáni egyenlegét ($+$ a bevétel, $-$ a kiadás, a veszteség):

$$\underbrace{3}_{\substack{győztes\ partik\\ száma}} \cdot \underbrace{10}_{\substack{egy\ parti\\ nyereménye}} + \underbrace{x}_{\substack{vesztes\ partik\\ száma}} \cdot \underbrace{(-10)}_{\substack{egy\ parti\\ vesztesége}} = \underbrace{-70}_{\substack{összes\\ veszteség}}$$

$$x = 10$$

Mivel Pistinek 3 nyertes és 10 vesztes partija volt, így felhasználva azt a feltételt, hogy döntetlen („pénz az ablakban”) nem volt, így összesen 13 partit játszottak.

D

23. Hány nemnegatív egész szám van, amely megoldása az $\frac{500\pi - 2021}{2022 - x} < 0$ egyenlőtlenségnek?

A) 2023 **B) 2021** **C) 2022** **D) végtelen sok** **E) más válasz**

A " < 0" típusú egyenlőtlenségek lényegében előjel-vizsgálatot jelentenek. Egy tört előjelét a számláló és a nevező előjele közösen határozza meg. Mivel a számláló jelen esetben negatív (< 0), ahhoz, hogy a tört negatív (< 0) legyen, a nevezőnek pozitívnak (> 0) kell lennie. Így a következő egyenlőtlenséget kell megoldani a nemnegatív (≥ 0) egész számok halmazán:

$$2022 - x > 0$$

$$x < 2022$$

Így 2022 db $\{0; 1; 2; \ldots 2020; 2021\}$ nemnegatív egész szám van, amely megoldása ennek az egyenlőtlenségnek.

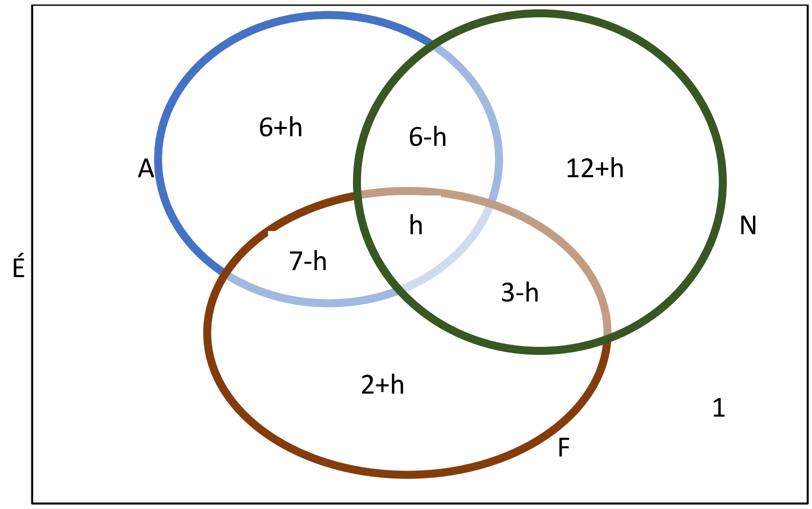
C

24. Egy gimnázium 39 fős évfolyamán egy olyan diák van, aki nem tanul semmilyen nyelvet sem. A többiek közül 19 -en tanulnak angolul, 21-en németül, 12-en pedig franciául. Angolul és németül is 6 -an, németül és franciául is 3 -an, angolul és franciául is pedig 7 -en tanulnak. Hány olyan diák van az évfolyamon, aki mindhárom nyelvet tanulja?

A) 1 **B) 3** **C) 2** **D) 0** **E) más válasz**

Jelöljük h-val azon tanulók számát, akik mind a három nyelvet tanulják, egyben A-val az angolt, N-nel a németet, F-fel a franciát tanulók, É-vel pedig az évfolyam halmazát!

Készítsünk egy halmazábrát (Venn-diagramot)! Visszafelé lebontogatva, a feladat feltételeit figyelembe véve, írjuk be a különálló (diszjunkt) részhalmazokba azok elemszámát h felhasználásával!



Mivel az összes, az elemeik számát is mutató részhalmaz diszjunkt (nincs közös elemük, diákjuk), ezért felhasználhatjuk az „egyszerűsített” szita-formulát $\{|A \cup B| = |A| + |B| - \underbrace{|A \cap B|}_{=0}\}$, ami alapján az évfolyam tanulóinak a száma (39) megegyezik az egyes részhalmazok elemszámának összegével:

$$(6+h) + (6-h) + (12+h) + (7-h) + h + (3-h) + (2+h) + 1 = 39$$

$$h = 2$$

Tehát az évfolyam azon tanulóinak a száma, akik mindhárom nyelvet tanulják: $h = 2$

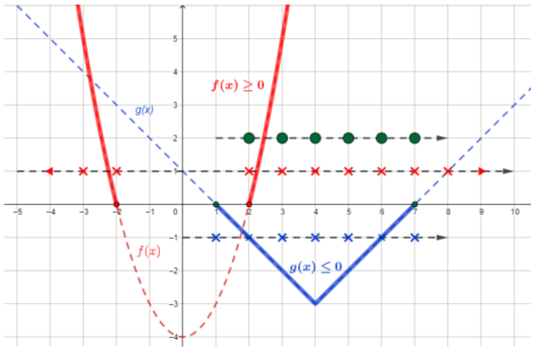
Megjegyzések: egy kifejtős feladatnál nem maradhat el az ellenőrzés, amit most az olvasóra bízunk, valamint természetesen olyan diszjunkt részhalmazokat kellett választani, amelyek uniója kiadta az évfolyam halmazát.

C

25. **Adott a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^2 - 4$ és a $g(x) = |x - 4| - 3$ függvény. Hány olyan egész szám van, amelyre az $f(x)$ függvény nemnegatív, miközben a $g(x)$ függvény nempozitív értékeket vesz fel?**

A) 7 **B) 8** **C) 5** **D) 6** **E) végtelen sok**

A feladat megoldásához érdemes a függvények grafikonjait megrajzolni. A vázlat is sokat segít, mert minden szükséges metszéspont rácspont (koordinátái egészek).



A másodfokú $f(x)$ függvény grafikonja felfelé nyitott parabola (piros). A feltételnek ($f(x) \geq 0$) megfelelő grafikon pontok az x tengelyen vagy fölötte vannak (**piros vastag ágak**). Ezek közül végtelen sok van, amelynek az első koordinátája egész, $\{x \epsilon Z | x \leq -2 \vee x \geq 2\}$ (piros x-ek szemléltetik a középső szaggatott számegyenesen).

A $g(x)$ abszolutérték függvény grafikonja felfelé nyitott „V” betű (kék). A feltételnek ($g(x) \leq 0$) megfelelő grafikon pontok az x tengelyen vagy alatta vannak (**kék vastag**). Ezek közül 7 olyan van, amelynek az első koordinátája egész, $\{x \epsilon Z | 1 \leq x \leq 7\}$ (kék x-ek szemléltetik az alsó szaggatott számegyenesen).

A két ponthalmaz-számhalmaz közös része $\{x \epsilon Z | 2 \leq x \leq 7\}$, 6 elemű halmaz (zöld pontok szemléltetik a legfelső szaggatott számegyenesen), vagyis hat olyan egész szám van, amely megfelel a feltételeknek.

D