XXV. Hajnal Imre Matematika Tesztverseny, 2022
II. kategória
Megoldások
(Kosztolányi József)

1. $22^2 - 20^2 =$

(A) 2 (B) 4 (C) 42 (D) 44 **(E)** 84

Megoldás: $22^2 - 20^2 = (22-20)\cdot(22+20) = 2\cdot 42 = 84$

2. Az *ABC* háromszögben $ABC\sphericalangle = 2x°$, $BCA\sphericalangle = (x+15)°$, $CAB\sphericalangle = (2x-10)°$. Ekkor $x =$

(A) 30 **(B)** 35 (C) 40 (D) 25 (E) 32

Megoldás: A háromszög belső szögeinek összege 180°, így $2x + (x+15) + (2x-10) = 180$, ahonnan $x = 35$.

3. Ha $\frac{1+2+3+...+n}{3n} = 36$, akkor $n =$

(A) 215 (B) 195 (C) 185 (D) 205 (E) 225

Megoldás: $\frac{1+2+3+...+n}{3n} = \frac{n\cdot(n+1)}{6n} = \frac{n+1}{6} = 36$, így $n = 215$.

4. Egy taxiban egy utas ülhet a jobb első ülésen és három utas a hátsó üléseken. Hányféleképpen ülhet be egy négy fős társaság a taxiba, ha egyikőjük nem szeretne elől ülni?

(A) 4 (B) 6 (C) 12 **(D)** 18 (E) 24

Megoldás: Az első ülésen ülőre 3 lehetőség van. A hátsó ülésre ülök $3! = 6$ féle sorrendben helyezkedhetnek el, így az elhelyezkedési lehetőségek száma $3\cdot 6 = 18$.

5. Az $x^2 + 3x + 2 = |x+1|$ egyenlet különböző valós gyökeinek összege:

(A) –4 (B) 4 (C) 0 (D) –1 (E) 2

Megoldás: Ha $x \geq -1$, akkor az egyenlet $x^2 + 2x + 1 = 0$, amelynek egyetlen gyöke $x_1 = -1$.

Ha $x < -1$, akkor az egyenlet $x^2 + 4x + 3 = 0$, amelynek a feltételnek megfelelő gyöke $x_2 = -3$

Így a valós gyökök összege -4.

6. A *k* paraméter mely valós értékei esetén lesz a következő egyenletrendszer megoldása olyan (*x*; *y*) rendezett számpár, amelyre $x > 0$ és $y > 0$ teljesül?

$$\left.\begin{aligned} kx - y &= 2 \\ x + y &= 3 \end{aligned}\right\}$$

(A) $k > -1$ (B) $k < \frac{2}{3}$ (C) $-1 < k < \frac{2}{3}$ (D) $k < -1$ **(E)** $k > \frac{2}{3}$

Megoldás: A két egyenlet összegéből $(k+1)\cdot x=5$. Mivel $x>0$, ezért $k>-1$. Az *x*-re kapott értéket a második egyenletbe helyettesítve átalakítások után $y=\dfrac{3k-2}{k+1}$ adódik. Mivel $y>0$ és $k>-1$, ezért $k>\dfrac{2}{3}$.

7. Ha $S_n=1-2+3-4+5-6+...+(-1)^{n+1}\cdot n$, ahol *n* pozitív egész, akkor $S_{2022}+S_{2023}=$

(A) –2 (B) –1 (C) 0 **(D)** 1 (E) 2

Megoldás: $S_{2022}+S_{2023}=2\cdot S_{2022}+2023=2\cdot((1-2)+(3-4)+...+(2021-2022))+2023=$

$$=2\cdot(-1011)+2023=-2022+2023=1$$

8. Hány különböző prímosztója van a 10^4-1 számnak?

(A) 1 (B) 2 **(C)** 3 (D) 4 (E) 5

Megoldás: $10^4-1=3^2\cdot 11\cdot 101$, ezért a számnak 3 különböző prímosztója van.

9. Az *ABC* háromszögben $AB=2$, $BC=3$, $CA=4$, és a háromszög belső szögfelezőinek metszéspontja *K*. Hogyan aránylik az *ABK* háromszög területe az *ABC* háromszög területéhez?

(A) $1:3$ (B) $1:4$ **(C)** $2:9$ (D) $2:11$ (E) $3:19$

Megoldás: *K* a háromszög beírt körének középpontja, ezért *K* távolsága az oldalaktól a beírt kör *r* sugara. $T_{ABC}=\dfrac{9}{2}\cdot r$, $T_{ABK}=\dfrac{2\cdot r}{2}=r$, így $T_{ABK}:T_{ABC}=2:9$.

10. Két (különböző) számot választunk véletlenszerűen a $\{2;\ 3;\ 5;\ 7;\ 11;\ 13;\ 17;\ 19;\ 23;\ 29\}$ halmazból. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott két szám összege 24?

(A) $\dfrac{1}{30}$ (B) $\dfrac{1}{10}$ (C) $\dfrac{2}{15}$ **(D)** $\dfrac{1}{15}$ (E) $\dfrac{2}{45}$

Megoldás: A 10 elemű halmazból két számot $\dbinom{10}{2}=45$ féleképpen lehet kiválasztani. Ezek közül 3 olyan pár van, amelyek összege 24: $5+19=7+17=11+13=24$. Így a keresett valószínűség $\dfrac{3}{45}=\dfrac{1}{15}$.

11. Hány olyan egyenlő szárú háromszög van, amelynek kerülete 25 kerületegység, és oldalai egész egység hosszúak?

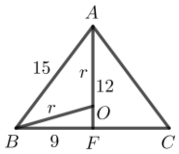
(A) Nincs ilyen háromszög. (B) 5 **(C)** 6 (D) 7 (E) 12

Megoldás: A háromszög-egyenlőtlenség miatt a szár legkisebb értéke 7 egység lehet, a legnagyobb pedig a kerületre vonatkozó feltétel alapján 12. Így 6 megfelelő egyenlő szárú háromszög van.

12. Az *ABC* egyenlő szárú háromszög alapja 18 cm, szárai 15 cm hosszúak. Hány cm hosszú a háromszög köré írt kör sugara?

(A) 9,25 (B) 9 **(C)** 9,375 (D) 8,75 (E) 8,875

Megoldás: Pitagorasz tétele alapján a háromszög alaphoz tartozó magassága 12 cm hosszú.



Ha O jelöli a háromszög köré írható kör középpontját és r a sugarát, akkor az ábra alapján a BFO derékszögű háromszögre a Pitagorasz-tétel: $9^2+(12-r)^2=r^2$. Innen $r=9{,}375\,\text{cm}$.

13. Az $f:\ \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=3x^2-px+2$ függvény grafikonja szimmetrikus az $x=\frac{1}{2}$ egyenletű egyenesre. Ekkor *f* minimuma

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $5\frac{1}{2}$ (C) $-\frac{1}{4}$ (D) $\frac{3}{4}$ **(E)** $\frac{5}{4}$

Megoldás: A feltételek alapján *f* grafikonja olyan felfelé nyíló parabola, amely minimumát az $x=\frac{1}{2}$ helyen veszi fel. Mivel $f(x)=3x^2-px+2=3\cdot\left(x-\frac{p}{6}\right)^2+2-\frac{p^2}{12}$, ezért $p=3$. Így *f* minimuma: $f\left(\frac{1}{2}\right)=2-\frac{3^2}{12}=\frac{5}{4}$.

14. Melyik a lehetséges legnagyobb pozitív maradék, ha egy kétjegyű pozitív egész számot elosztunk a számjegyei összegével?

(A) 13 (B) 14 **(C)** 15 (D) 16 (E) 17

Megoldás: Mivel a legnagyobb számjegyösszeg 18, ezért a lehetséges legnagyobb maradék a 17. Mivel $99=5\cdot18+9$, ezért a 17 nem fordulhat elő megfelelő maradékként. 16 sem fordulhat elő, ugyanis $89=5\cdot17+4$ és $98=5\cdot17+13$. 15 viszont már előfordul: $79=4\cdot16+15$.

15. A $H=\{1;\ 2;\ 3;\ ...;\ 49;\ 50\}$ halmaznak (az első 50 darab pozitív egész szám halmazának) *S* olyan részhalmaza, amelyben nincs két olyan elem, amelyek összege osztható 7-tel. Legfeljebb hány eleme lehet *S*-nek?

(A) 21 (B) 22 **(C)** 23 (D) 24 (E) 25

Megoldás: A feltétel szerint *S*-ben 1 darab 7-tel osztható szám lehet, és az (1; 6), (2; 5), (3; 4) maradékpárok mindegyikéből csak az egyik fordulhat elő maradékként. Akkor kapjuk a legnagyobb elemszámú megfelelő *S* részhalmazt, ha mind a 8 darab $7k+1$ alakú számot belevesszük, valamint például az összes $7k+2$ és $7k+3$ alakú számot. Így *S* elemszámának maximuma $1+8+7+7=23$.

16. Hány páronként nem egybevágó háromszöget határoznak meg egy kocka csúcsai?

(A) 1 (B) 2 **(C)** 3 (D) 4 (E) 5

Megoldás: A keletkező háromszögek oldalai hosszukat tekintve háromfélék lehetnek: a kocka oldalélei (*x*), lapátlói (*y*), testátlói (*z*). Egyszerűen meggondolható, hogy háromféle háromszög lehetséges egybevágóság erejéig: *xxy*, *xyz*, *yyy*.

17. A pozitív egész számok halmazán értelmezett *f* függvényre minden *m*, *n* pozitív egész esetén teljesül az $f(m+n)=f(m)\cdot f(n)-f(m\cdot n)+1$ egyenlet. Ha $f(1)=2$, akkor $f(2022)=$

(A) 2023 (B) 2022^{2021} (C) 2021 (D) 2022^{2023} (E) 2022

Megoldás: Néhány kezdő értéket megnézve az sejthető, hogy $f(n) = n+1$, így az (A) válasz tűnik jónak.
A sejtés teljes indukcióval gyorsan bizonyítható.
$n = 1$ esetén igaz, mert ez feltétel.
Tegyük fel, hogy valamely $n \geq 1$ esetén igaz a sejtésünk, és vizsgáljuk $n+1$-re.

$$f(n+1) = f(n) \cdot f(1) - f(n) + 1 = f(n) + 1$$

Ezzel a sejtést bebizonyítottuk, $f(2022) = 2023$.

18. Kata és Marci hétvégi sétájukra ugyanabban az időpontban, ugyanazon az útvonalon indultak el a házuk elől. Marci sétatempója 6 km/h, Katáé 4 km/h. Marci 1 km séta után visszafordult. Kata akkor fordult vissza, amikor Marcival szembetalálkozott. Hány perccel Marci után ért Kata a házuk elé?

(A) 10 (B) 5 (C) 4 (D) 3,75 (E) 3

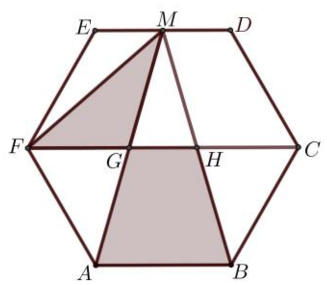
Megoldás: Marci visszafordulásáig Kata 2/3 km-t tett meg. Ezután a találkozásig szemben haladtak 10 km/h relatív sebességgel, ezért Marci megfordulása után 2 perccel találkoztak. Ha Kata is abban a pillanatban fordult volna vissza, mint Marci, akkor egyszerre értek volna a házuk elé. Mivel azonban Kata még 2 percig Marcival ellenkező irányba ment, ezért 4 perccel Marci után ért a házuk elé.

19. Egy dobozban hat egyforma tapintású golyó található 1-től 6-ig megszámozva úgy, hogy minden golyón egy szám található, és 1-től 6-ig minden szám előfordul. Bekötött szemmel (véletlenszerűen) kihúzunk két golyót. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott golyókon levő számok különbsége 1?

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{11}{30}$ (E) $\frac{5}{18}$

Megoldás: Két golyót $\binom{6}{2} = 15$ féleképpen lehet a dobozból kihúzni. Mivel 1-től 6-ig 5 olyan számpár van, amelyek különbsége egy, ezért a keresett valószínűség $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

20. Az *ABCDEF* szabályos hatszögben *M* a *DE* oldal felezőpontja. $\frac{T_{ABHG}}{T_{FGM}} =$



(A) 2 (B) 3 (C) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (D) $\sqrt{3}$ (E) $\sqrt{2}$

Megoldás: Mivel $FC = 2AB$, ezért $T_{FCM} = T_{ABM}$. Így $T_{ABHG} = T_{FGM} + T_{HCM} = 2T_{FGM}$.

21. $\left(1+\frac{3}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{5}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{7}{9}\right)\cdot\left(1+\frac{9}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{41}{400}\right)=$

(A szorzat *n*-edik tényezője $1+\frac{2n+1}{n^2}$.)

(A) 441 (B) 4041 (C) 4410 (D) 4001 (E) 4010

Megoldás: A szorzat tényezőit közös nevezőre hozva egy teleszkópikus szorzatot kapunk.

$$\left(1+\frac{3}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{5}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{7}{9}\right)\cdot\left(1+\frac{9}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{41}{400}\right)=\frac{4}{1}\cdot\frac{9}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{(n+1)^2}{n^2}\cdot\ldots\cdot\frac{441}{400}=441$$

22. Hány olyan háromjegyű szám van a tízes számrendszerben, amelyben az egyik számjegy a másik kettő átlaga?

(A) 121 (B) 117 (C) 112 (D) 115 (E) 105

Megoldás: Az azonos számjegyekből álló számok megfelelnek, 9 darab van belőlük. Nincs olyan megfelelő szám, amelyben pontosan két számjegy azonos.
A továbbiakban az „átlag számjegy” (jelölés: *A*) alapján számoljuk össze a megfelelő számokat.
Legyenek a továbbiakban a háromjegyű szám számjegyei páronként különbözők.
1. A 0 nincs a számjegyek között.
Ha $A=8$, akkor a számjegyek 7, 8, 9, a megfelelő számok száma 6.
Ha $A=7$, akkor a számjegyek lehetnek 5, 7, 9, vagy 6, 7, 8. 12 ilyen szám van.
Ha $A=6$, akkor három számjegycsoport van (3, 6, 9; 4, 6, 8; 5, 6, 7), a megfelelő számok száma 18.
Ha $A=5$, akkor négy számjegycsoport van (1, 5, 9; 2, 5, 8; 3, 5, 7; 4, 5, 6), így 24 megfelelő számot kapunk.
Ha $A=4$, akkor három számjegycsoport van (1, 4, 7; 2, 4, 6; 3, 4, 5), így összesen 18 ilyen számot kapunk.
Ha $A=3$, akkor két jó számjegycsoport (1, 3, 5; 2, 3, 4), és így 12 megfelelő szám van.
Ha $A=2$, akkor a számjegyek 1, 2, 3, a megfelelő számok száma pedig 6.
2. Az egyik számjegy 0. Ekkor a lehetséges négy számjegycsoport: 0, 1, 2,; 0, 2, 4; 0, 3, 6; 0, 4, 8. Mivel mindegyik számjegycsoport 4 számot határoz meg, így 16 olyan megfelelő szám van, amelyben az egyik számjegy 0.
Összesen $9+2\cdot(6+12+18)+24+16=121$ alkalmas háromjegyű szám van.

23. Mely pozitív egész *n* esetén teljesül a következő egyenlet?

$$\frac{n^3-3}{n^3}+\frac{n^3-4}{n^3}+\frac{n^3-5}{n^3}+\frac{n^3-6}{n^3}+\ldots+\frac{5}{n^3}+\frac{4}{n^3}+\frac{3}{n^3}=169$$

(A) 5 **(B)** 7 (C) 9 (D) 11 (E) 13

Megoldás: Osszunk tagonként az egyenlet bal oldalán tagonként n^3-nal:

$$\left(1-\frac{3}{n^3}\right)+\left(1-\frac{4}{n^3}\right)+\ldots+\left(1-\frac{n^3-3}{n^3}\right)=169.$$

Összevonás után kapjuk:

$$\left(n^3-5\right)-\left(\frac{3}{n^3}+\frac{4}{n^3}+\ldots+\frac{n^3-3}{n^3}\right)=169.$$

A bal oldalon a második zárójelben álló kifejezés megegyezik az eredeti egyenlet bal oldalával, így

$$n^3-5-169=169.$$

Innen $n^3=343$, $n=7$.

24. Egy nyolc csapatos labdarúgó bajnokságban minden csapat minden csapattal egyszer játszik. Győzelemért 2 pont, döntetlenért 1 pont, vereségért 0 pont jár. Legalább hány pontot kell ahhoz szereznie egy csapatnak a bajnokság végére, hogy biztosan az első négy csapat között végezzen?

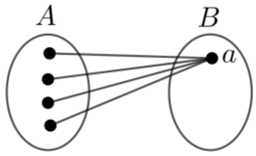
(A) 8 (B) 9 (C) 10 **(D)** 11 (E) 12

Megoldás: A bajnokságban 7 forduló során összesen $7\cdot4\cdot2=56$ pontot osztanak szét.
10 pont a „biztos első négy”-hez nem elegendő, ugyanis lehetséges olyan végső állás, hogy az első öt csapat mindegyikének 10-10 pontja van, a maradék három csapat mindegyikének pedig 2-2. Ez meg is valósulhat a következőképpen: az első öt csapat egymás közötti meccsei döntetlenre végződnek, az utolsó három csapat egymás közötti meccsei szintén, és az első öt csapat mindegyike legyőzi az utolsó három csapat mindegyikét.
11 pont viszont már elegendő. Ha 11 ponttal egy csapat ötödikként végezne, akkor az előtte levő csapatok mindegyikének legalább 11 pontja lenne, ami az első öt csapat vonatkozásában összesen legalább 55 pont. Ez azt jelentené, hogy az utolsó három csapatra összesen legfeljebb 1 pont jutna. Ez viszont lehetetlen, ugyanis az egymás közötti három meccsükön 6 pontot osztanak ki közöttük.

25. *Klikk*-nek hívjuk azokat a legalább 3 emberből álló csoportokat, amelyekben bármely két ember ismeri egymást. (Az ismeretség kölcsönös.) Legfeljebb hány ismeretség lehet egy 2*n* fős ($n>1$) társaságban, ha tudjuk, hogy nincs benne *klikk*?

(A) $3n-2$ (B) $n\cdot(2n-1)$ **(C)** n^2 (D) $\frac{n^3+11n-6}{6}$ (E) $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$

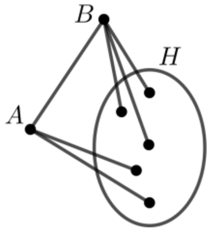
Megoldás: A megoldás során a feladat gráfos terminológiáját fogjuk használni: él=ismeretség, pont=ember.
n^2 él behúzható a 2*n* pontú egyszerű gráfban úgy, hogy a gráfban nincs háromszög (így nagyobb klikk sincs). Osszuk ugyanis a pontokat két *n* pontból álló osztályra, és az egy osztályon belüli pontok között ne legyen él. Viszont mindkét osztály minden pontját él kösse össze a másik osztály minden pontjával. Könnyen látható, hogy ekkor n^2 él van az így kapott gráfban, és nincs benne háromszög.
A továbbiakban kétféleképpen is bebizonyítjuk a következő gráfelméleti tételt:
Ha egy 2*n* pontú egyszerű gráfnak több mint n^2 darab éle van, akkor van a gráfban háromszög.
I. bizonyítás („extremális elem” stratégia)
Legyen a 2*n* pont közül *a* a(z egyik) **maximális** fokszámú pont. Az *a*-val szomszédos (összekötött) pontok halmaza *A*, a többi pont halmaza *B*.



Legyen a gráf éleinek száma $k \geq n^2 + 1$, és ad abszurdum tegyük fel, hogy a gráfban nincs háromszög. Ekkor az *A*-beli pontok közül semelyik kettőt nem kötheti össze él.
Ha *s* jelöli a *B*-beli elemek fokszámainak összegét, akkor az indirekt feltétel szerint a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget felhasználva

$$k \leq s \leq |A| \cdot |B| \leq \left(\frac{|A| + |B|}{2} \right)^2 = n^2 .$$

Ez ellentmond az élek számára vonatkozó feltételnek, ami az állítást bizonyítja.
II. bizonyítás (*n* szerinti teljes indukció)
$n = 2$ esetén 4 pont van, legfeljebb 1 él nincs behúzva, ezért van háromszög.
Tegyük fel, hogy tetszőleges *n*-re igaz, és vegyünk egy $2(n+1)$ csúcsú gráfot, amelyben legalább $(n+1)^2 + 1$ él be van húzva. Legyen *A* és *B* két olyan pont, amelyek között van él, a többi 2*n* darab pont halmazát jelöljük *H*-val. *A*-ból *H*-ba *k* darab, *B*-ből *H*-ba *m* darab él fut.



Két esetet kell megvizsgálnunk:
1. Ha $k + m > 2n$, akkor a skatulyaelv miatt van *H*-ban olyan *C* pont, amely *A*-val is, *B*-vel is össze van kötve, azaz *ABC* háromszög benne van a gráfban.
2. Ha $k + m \leq 2n$, akkor az *AB* éllel együtt legfeljebb $2n + 1$ olyan él van, amelynek egyik csúcsa *A* vagy *B*. A többi élnek mindkét végpontja *H*-beli, azaz *H*-ban az élek száma legalább $(n+1)^2 + 1 - (2n+1) = n^2 + 1$. A 2*n* pontú *H*-ban tehát van legalább $n^2 + 1$ darab él, így az indukciós feltevés miatt van *H*-ban háromszög.
Ezzel bebizonyítottuk az állítást.