XXV. Hajnal Imre Matematika Tesztverseny-2022

III. kategória megoldások

1. Az alábbi számok közül mivel egyezik meg a $\frac{2,2}{10^{-2}}$ kifejezés értéke?

A) $0,22$ B) 220 C) $2,2\cdot 10$ D) $22\cdot 10^2$ E) $2,2\cdot 10^{-2}$

$$\frac{2,2}{10^{-2}} = 2,2\cdot 10^2 = 220$$

B

2. Egy busz egyenletes sebességgel halad, így az utazás alatt eltelt idő egyenesen arányos a megtett távolsággal. Ha a busz 120 km-t 3 óra alatt tesz meg, akkor hány kilométert tesz meg 5 óra alatt?

A) 168 km B) 196 km C) 200 km D) 246 km E) 220 km

Az egyenes arányosság miatt:

$$\frac{120\ \text{km}}{3\ \text{óra}}\cdot 5\ \text{óra} = 40\frac{\text{km}}{\text{h}}\cdot 5\ \text{óra} = 200\ \text{km}$$

C

3. Melyik szám reciproka a legkisebb az alábbiak közül?

A) $-\frac{1}{2}$ B) $-\frac{2}{3}$ C) $-\frac{3}{4}$ D) 4 E) $-\frac{5}{6}$

Pozitív szám reciproka pozitív, így a 4 már nem lehet megoldás. A többi szám negatív, és két negatív szám közül a nagyobb szám reciproka a kisebb, tehát a megadott negatív számok közül a legnagyobbnak lesz a legkisebb a reciproka.
A kérdés innentől az, hogy melyik negatív szám a legnagyobb.

Adjunk hozzá mindegyik negatív számhoz egyet! Ez nem változtat a köztük lévő relációkon, azaz:

$$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \qquad 1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3} \qquad 1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4} \qquad 1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$$

Ezek közül a legnagyobb szám az első.

A feladat megoldható úgy is (lehet, így még gyorsabb is), ha egyenként megnézzük a számok reciprokait:

$$\frac{1}{-\frac{1}{2}}=-2 \qquad \frac{1}{-\frac{2}{3}}=-\frac{3}{2} \qquad \frac{1}{-\frac{3}{4}}=-\frac{4}{3} \qquad \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{-\frac{5}{6}}=-\frac{6}{5}$$

Felhasználva azt, hogy a negatív számok közül az a kisebb, amelyiknek az abszolút értéke a legnagyobb, és azt, hogy bármely pozitív szám nagyobb bármely negatív számnál, így a helyes válasz:

A

4. **Egy átlátszatlan zacskóban 10 db piros, 10 db fehér, 10 db zöld golyó van. Minimum hány golyót kell belőle kivenni látatlanban, hogy a kivettek között biztosan legyen mindegyik színből? A golyók csak a színükben különböznek.**

A) 3 **B) 4** **C) 20** **D) 21** **E) 7**

Maximum 20 golyót tudunk úgy kihúzni a zacskóból, hogy ne legyen minden színből legalább egy. Így 20 húzás nem feltétlenül elég: pl. kihúzhatjuk az összes pirosat, utána az összes fehéret, így nincs meg mind a három szín.
21 húzás már biztosan elég.

Természetesen kevesebb húzás is elég lehet, pl. három (piros-fehér-zöld), de ez nem biztos.

D

5. **Egy családban az anya havi keresete $\mathbf{240000}$ Ft, ami a fia keresetének $\mathbf{120}$ %-a, az apáénak pedig a 80 %-a. Hány forintot keres egy hónapban a család?**

A) 740000 Ft **B) 750000 Ft** **C) 760000 Ft** **D) 780000 Ft** **E) 800000 Ft**

A család összes keresete, figyelembe véve a százalékos viszonyokat:

$240000+\frac{240000}{120\%}+\frac{240000}{80\%}=240000+\frac{240000}{1,2}+\frac{240000}{0,8}=240000+200000+300000=740000\text{ Ft}$

A

6. **Két egymást követő pozitív páros szám hányadosa $\mathbf{1\frac{1}{19}}$. Mennyi ezek közül a kisebbik szám értéke?**

A) 20 **B) 48** **C) 36** **D) 38** **E) 80**

Jelöljük a kisebb számot n-nel! Az őt követő legkisebb páros szám $n+2$.

$$\frac{n+2}{n}=1\frac{1}{19}$$

$$1+\frac{2}{n}=1+\frac{1}{19}$$

$$\frac{2}{n}=\frac{1}{19}=\frac{2}{38}$$

Azaz a két páros szám a 38 és a 40 lesz, amelyekből a kisebb a 38.

D

7. **Mennyi a $\sqrt{16}-2$ szám ellentettje?**

A) $\sqrt{16}+2$ **B) -2** **C) 2** **D) $0,5$** **E) $-0,5$**

Egy szám ellentettjét úgy kapjuk, ha a számot -1-gyel megszorozzuk.

$$-1\cdot(\sqrt{16}-2)=-(4-2)=-2$$

B

8. A 0, az 5 és a 7 számjegyekkel hány olyan háromjegyű szám írható fel, amely 5-tel osztható, és különböző számjegyekből áll?

A) 1 **B) 2** **C) 3** **D) 4** **E) 6**

Az öttel oszthatóság miatt az utolsó számjegy nem lehet 7, csak 0 vagy 5.
Ha 0-ra végződik, akkor a lehetséges megoldások: 570; 750
Ha 5-re végződik, akkor a lehetséges megoldások: 705. (A 075 nem háromjegyű szám.)

C

9. Egy téglalap egyik oldala 10 cm, a szomszédos oldala ennek $\frac{12}{5}$ része. Mekkora a téglalap átlója?

A) 20 cm **B) 30 cm** **C) 34 cm** **D) 13 cm** **E) 26 cm**

A téglalap szomszédos oldala $10\text{ cm}\cdot\frac{12}{5}=\frac{10\cdot 12}{5}\text{ cm}=\frac{120}{5}\text{cm}=24\text{ cm}$ hosszú,
amiből a téglalap átlója Pitagorasz tétele szerint:

$$x^2=(10\text{ cm})^2+(24\text{ cm})^2=100\text{ cm}^2+576\text{ cm}^2=676\text{ cm}^2$$

amiből $x=26\text{ cm}$

E

10. Egy iskolának mind az öt érettségiző osztálya egy-egy táncot mutat be a szalagavató bálon. Az A osztály palotást táncol, ezzel indul a műsor. A többi tánc sorrendjét sorsolással döntik el. Hányféle sorrend alakulhat ki?

A) 24 **B) 12** **C) 8** **D) 4** **E) 20**

A sorsoláson részt vevő 4 osztályt tetszőleges sorrendben kihúzhatják, az összes lehetséges sorrendjük, így a megoldás $4!=24$

A

11. Mennyi az x értéke, ha igaz, hogy $x-(x-(x-2022))=1$?

A) -2023 **B) -2022** **C) 0** **D) 2022** **E) 2023**

A zárójelek felbontási szabálya alapján:

$$x-\underbrace{(x-(x-2022))}_{2022}=x-2022=1,$$

amiből $x=2023$.

E

12. Egy családban az anyuka, az apuka és a gyerekek életkorának összege jelenleg 107 év. Hány gyerek van a családban, ha öt évvel ezelőtt a család együttes életkora 82 év volt, és a család létszáma azóta nem változott?

A) 2 **B) 3** **C) 4** **D) 5** **E) 6**

Együttesen most $107-82=25$ évvel idősebbek, mint 5 évvel ezelőtt voltak. Mivel öt évvel ezelőtt mindannyian öt évvel voltak fiatalabbak, így a család $\frac{25}{5}=5$ főből áll.
Ebből következik, hogy a családban 3 gyerek van.

B

13. Egy egyenes körhenger alapkörének sugara 5 cm, a magassága ennek az értéknek a négyszerese. Ha megnövelnénk az alapkör sugarát a kétszeresére, hány cm legyen a henger magassága, hogy az így kapott henger térfogata megegyezzen az eredeti henger térfogatával?

A) 2 cm **B) 6 cm** **C) 5 cm** **D) 10 cm** **E) $2,5$ cm**

Az eredeti henger térfogata: $V = r_1^2 \pi h_1$
ahol $r_1 = 5 \text{ cm}$ az alapkör sugara, és $h_1 = 4 \cdot 5 \text{ cm} = 20 \text{ cm}$ a henger magassága.

A transzformált henger térfogata $V = r_2^2 \pi h_2$
ahol $r_2 = 2 \cdot 5 \text{ cm} = 10 \text{ cm}$ és h_2 ismeretlen.

$$\underbrace{(5 \text{ cm})^2 \pi \cdot 20 \text{ cm}}_{\text{az eredeti henger térfogata}} = V = \underbrace{(10 \text{ cm})^2 \pi \cdot h_2}_{\text{a transzformált henger térfogata}}$$

$$\frac{(10 \text{ cm})^2 \pi \cdot h_2}{(5 \text{ cm})^2 \pi \cdot 20 \text{ cm}} = \frac{V}{V} = \left(\frac{10 \text{ cm}}{5 \text{ cm}}\right)^2 \cdot \frac{h_2}{20 \text{ cm}} = 2^2 \cdot \frac{h_2}{20 \text{ cm}} = \frac{h_2}{5 \text{ cm}} = 1 \Rightarrow h_2 = 5 \text{ cm}$$

Azaz az új henger magassága 5 cm.

C

14. Egy paralelogramma szomszédos oldalainak hossza 20 cm és 30 cm. A nagyobb oldalhoz tartozó magasság $7,2$ cm. Mekkora a paralelogramma kisebbik oldalhoz tartozó magassága?

A) $10,2$ cm **B) $7,5$ cm** **C) $10,8$ cm** **D) 12 cm** **E) $9,8$ cm**

A 30 cm-es oldalhoz tartozó magasság $m_{30} = 7{,}2 \text{ cm}$, a 20 cm-es oldalhoz tartozó magasság m_{20} ismeretlen.

Bármelyik oldal és a hozzá tartozó magasság szorzata a paralelogramma területét adja, azaz

$$30 \text{ cm} \cdot 7{,}2 \text{ cm} = T = 20 \text{ cm} \cdot m_{20}$$

Átrendezés után:

$$\frac{30 \text{ cm} \cdot 7{,}2 \text{ cm}}{20 \text{ cm}} = m_{20} = 10{,}8 \text{ cm}$$

C

15. Egy téglatest alakú akvárium belső szélessége 20 cm, belső magassága 40 cm, belső hosszúsága 120 cm. Legfeljebb hány liter víz fér az akváriumba?

A) $9,6$ liter **B) 48 liter** **C) 96 liter** **D) 960 liter** **E) $4,8$ liter**

Mivel 1 liter víz térfogata 1 dm^3, ezért váltsuk át az oldalhosszakat deciméterre, így az eredmény mérőszáma lesz a válasz:

$$V = \underbrace{2 \text{ dm}}_{\text{szélesség}} \cdot \underbrace{4 \text{ dm}}_{\text{magasság}} \cdot \underbrace{12 \text{ dm}}_{\text{hosszúság}} = 96 \text{ dm}^3 = 96 \text{ liter}$$

Az akvárium 96 literes, így legfeljebb 96 liter víz fér bele.

C

16. A 2020-as olimpián a magyar csapat 20 érmet nyert. Az ezüst- és bronzérmeik együttes száma az összes érem 70 %-a volt. Hány aranyérmet nyert a magyar csapat ezen az olimpián?

A) 6 **B) 7** **C) 8** **D) 10** **E) 9**

Az ezüst- és bronzérmek száma: $20 \cdot 70\% = 20 \cdot 0{,}7 = 14$ darab

A maradék $20 - 14 = 6$ érem aranyérem.

A

17. Mennyivel lehet egyenlő az alábbiak közül n, ha tudjuk, hogy $2,7 \cdot 10^n$ egy egész szám köbe?

A) 2 **B) 3** **C) 4** **D) 5** **E) 6**

Megoldhatjuk úgy a feladatot, hogy kipróbáljuk, a megadott n-ek esetén a kapott szám köbszám (egész szám köbe) lesz-e:

$2{,}7 \cdot 10^2 = 270$ $2{,}7 \cdot 10^3 = 2700$ $2{,}7 \cdot 10^4 = 27000 = 30^3$ $2{,}7 \cdot 10^5 = 270000$

Csak az $n = 4$ esetén lesz köbszám

Megoldhatjuk úgy is a feladatot, hogy átalakítjuk a kifejezést a hatványozás azonosságát felhasználva:
$2{,}7 \cdot 10^n = 27 \cdot 10^{n-1}$,
aminek a köbgyöke: $\sqrt[3]{27 \cdot 10^{n-1}} = 3 \cdot 10^{\frac{n-1}{3}}$, ami egy egész szám kell, hogy legyen. Ez csak akkor lesz egész, ha $\frac{n-1}{3}$ egy egész szám.
A lehetséges megoldások közül csak az $n = 4$ esetén lesz egész szám a kitevő.

Megjegyzés: ez utóbbi megoldás inkább középiskola 10. évfolyamában jöhet elő.

C

18. 5 liter 20 %-os töménységű alkohol oldathoz hozzáöntünk 3 liter tiszta vizet. Hány %-os lesz az így kapott oldat töménysége?

A) 12,5 % **B) 10 %** **C) 12 %** **D) 15 %** **E) 20 %**

Kezdetben az oldatban $5 \text{ liter} \cdot 20\% = 5 \text{ liter} \cdot 0{,}2 = 1$ liter oldott anyag van.
Hozzáöntés után az oldott anyag nem változik (tiszta vízzel hígítottunk), így az oldat töménysége:

$$\frac{\overbrace{1 \text{ liter}}^{\text{oldott anyag}}}{\underbrace{8 \text{ liter}}_{\text{oldat űrtartalma}}} \cdot 100 = 12{,}5\%$$

A

19. Hogyan változik két pozitív szám hányadosa, ha az osztandót 5-szörösére növeljük, az osztót pedig 5-öd részére csökkentjük?

A) 25-öd részére csökken **B) 5-öd részére csökken** **C) nem változik**
D) 5-szörösére növekszik **E) 25-szörösére növekszik**

Legyen $\frac{a}{b} = 5$, ahol $a; b > 0$
Növeljük az osztandót (számlálót) 5-szörösére, csökkentsük az osztót (nevező) ötödére:

$$\frac{5 \cdot a}{\frac{b}{5}} = \frac{25a}{b} = 25 \cdot \frac{a}{b}$$

Tehát az $\frac{a}{b}$, az eredeti hányados a 25-szörösére növekszik ($\frac{a}{b}$ pozitív).

E

20. Mennyi az $\frac{1}{x^{2022}}+x^{2022}$ kifejezés értéke, ha $\frac{x}{2}=-0,5$?

A) $1,5$ **B) 2** **C) 0** **D) -1** **E) -2**

Ha $\frac{x}{2}=-0{,}5$, akkor $x=-1$, amiből $x^{2022}=(-1)^{2022}=1$.
Ebből $\frac{1}{x^{2022}}+x^{2022}=\frac{1}{1}+1=2$

B

21. Egy 25 fős osztály matematika dolgozatot írt. Az eredményekről a következőket tudjuk: elégtelen dolgozat nem volt, hárman kaptak elégségest, és hatan négyest. Ugyanannyian írtak közepest, mint jelest. Mennyi volt az osztály átlaga?

A) 3,76 **B) $4,1$** **C) $3,75$** **D) $3,5$** **E) $3,67$**

Jelöljük n-nel a közepesek és az ezzel egyenlő jelesek számát!

Az érdemjegyek darabszáma: $\underbrace{0}_{\text{elégtelen}}+\underbrace{3}_{\text{elégséges}}+\underbrace{n}_{\text{közepes}}+\underbrace{6}_{\text{négyes}}+\underbrace{n}_{\text{jeles}}=25$, amiből $n=8$.

Ebből az osztályátlag: $\frac{\overbrace{0\cdot 1}^{\text{elégtelen}}+\overbrace{3\cdot 2}^{\text{elégséges}}+\overbrace{8\cdot 3}^{\text{közepes}}+\overbrace{6\cdot 4}^{\text{négyes}}+\overbrace{8\cdot 5}^{\text{jeles}}}{25}=\frac{0+6+24+24+40}{25}=\frac{94}{25}=3{,}76$

A

22. Egy medencét 2 csapon keresztül lehet vízzel feltölteni. Ha csak az első csapot használjuk, akkor 2 óra alatt lehet megtölteni az üres medencét. Ha csak a második csapot használjuk, akkor 3 óra alatt. Hány perc alatt telik meg az üres medence, ha egyszerre mindkét csapot kinyitjuk?

A) 75 perc **B) 72 perc** **C) 45 perc** **D) 90 perc** **E) 60 perc**

Az első csap óránként $\frac{1}{2}$ részét tölti meg a medencének, a második csap óránként $\frac{1}{3}$ részét.
Ha mindkét csapot kinyitjuk, akkor óránként $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$ részét töltik meg a medencének, amiből a medence $\frac{1}{\frac{5}{6}}=\frac{6}{5}$ óra, azaz $\frac{6}{5}\cdot 60=72$ perc alatt telik meg, ha a két csap együtt üzemel.

Meg lehet oldani úgy is a feladatot, hogy a közös üzemelési időt t –vel, a teljes elvégzett feltöltést m-mel jelöljük. Ekkor a teljesítmény-munka-idő kapcsolatát ($W=P\cdot t, W_2+W_3=W$) felhasználva:

$$\frac{m}{2}\cdot t+\frac{m}{3}\cdot t=m$$

$$\frac{t}{2}+\frac{t}{3}=1$$

$$\frac{5t}{6}=1$$

$$t=1{,}2 \text{ óra} = 72 \text{ perc}$$

B

23. Az ABC háromszög C csúcsánál lévő belső szögének nagysága az egyenesszög fele. A C csúcsból kiinduló öt félegyenessel ezt a szöget egyenlő részekre (szögekre) osztjuk fel. Hány fokosak lettek az így keletkezett egyenlő nagyságú szögek?

A) 60° B) 30° C) 36° D) 18° E) 15°

Az egyenesszög 180°, ennek a fele 90°, azaz a C csúcsnál lévő szög derékszög.
5 db félegyenessel a szögtartományt 6 részre osztjuk, amik a leírás szerint egyenlőek, azaz egy ilyen szög $\frac{90°}{6} = 15°$-os.

E

24. Magyarországon olyan forgalmi rendszámokat fognak bevezetni, amelyek 4 betűből és az azt követő 3 számjegyből állnak. A nagyszülők kérték, hogy a rendszámuk betűs része a $BEMB$ legyen. Hány olyan rendszám lehet összesen az országban, amelyek betűs része a nagyszülők rendszámával megegyezik, és a számos részben nem szerepel a 0 számjegy?

A) 900 B) 728 C) 10^3 D) 999 E) 729

Csak a számos rész érdekes. Egyik helyen sem szerepelhet a 0 számjegy, azonban a többi kilenc db megengedett, így összesen $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ szám lehetséges.

E

25. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amely 7-tel osztva is, valamint 8-cal osztva is egyaránt 1 maradékot ad?

A) 57 B) 113 C) 1 D) 0 E) 56

Az 1 maradék miatt a keresett számnál 1-gyel kisebb szám osztható 7-tel és 8-cal is, így 56-tal is (relatív prímek). A 0 osztható 56-tal, így a keresett szám az 1 lesz.

Gondolkodhatunk úgy is, hogy $n + 1$-gyel jelöljük a keresett számot, ahol n osztható 7-tel és 8-cal is. Ekkor osztható 7 és 8 legkisebb közös többszörösével is, ami 56.

Tehát a megoldási lehetőségek között azt a számot keressük, ami egy 56 többszörösénél eggyel több. Az A, B, C megoldások mind jók (a 0 is 56-többszörös!), de közülük a C a legkisebb.

Megjegyzés: A feladat furfangosságát mutatja az, hogy a megoldása során fel kell használni a nempozitív 0 számot is, de az ebből következő megoldás (1) pozitív lesz. Éppen ezért gondolhatnánk, hogy az 57 lesz a megoldás, ami a maradékok szempontjából megfelel a feltételeknek, de nem a legkisebb ($1 < 57$).

C