XXVII. Hajnal Imre Matematika Tesztverseny 2023-2024

I. kategória megoldások

1. **Hány olyan n egész szám van, amelyre a $\frac{6}{n-6}$ tört értéke egész szám?**

A) 3 B) 4 C) 6 D) 7 E) 8

Mivel a $\frac{6}{n-6}$ tört értéke egész szám, ezért az $n-6$ osztója a 6-nak.

A 6 osztói (n-6): $\pm 1; \pm 2; \pm 3, \pm 6$

Mivel ez 8 db osztó, így az n-re is 8 db egész szám adódik: 7; 5; 8; 4; 9; 3; 12; 0

E

2. **Egy teremben 6 lány beszélget. Hány fiú jött be közben a lányokhoz, hogy az így kibővült társaságból véletlenszerűen kiválasztva egy tanulót, $\frac{2}{3}$ lesz annak az esélye (valószínűsége), hogy ő fiú?**

A) 2 B) 12 C) 6 D) 4 E) más érték

Jelöljük a fiúk számát f-fel!

A fiúk megérkezése után a kibővült létszám: $6+f$

Egy fiú véletlenszerű kiválasztásának esélye (valószínűsége): $\frac{f}{6+f}$

A feltétel szerint: $\frac{f}{6+f}=\frac{2}{3}$, amiből kapjuk, hogy $f=12$.

Ellenőrzés: $\frac{f}{6+f}=\frac{12}{6+12}=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$

Tehát 12 fiú jött be a lányokhoz.

B

3. **A piacon vágott virágot vásároltunk. A vásárolt virágok ötödével nagymamát köszöntöttük, a megmaradt virágok negyedét születésnapra vittük. Mindezek után 15 szál virág maradt meg. Hány szál virágot vásároltunk?**

A) 20 B) 25 C) 30 D) 35 E) 40

Jelöljük a virágok számát v-vel!

A nagymamát köszöntöttük $\frac{1}{5}v$-vel.

Maradt $\frac{4}{5}v$, aminek egynegyede $\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}v=\frac{1}{5}v$. Ezt születésnapra vittük.

A feltétel szerint maradt még 15 szál virág, így

$$\frac{1}{5}v+\frac{1}{5}v+15=v,$$

amiből:

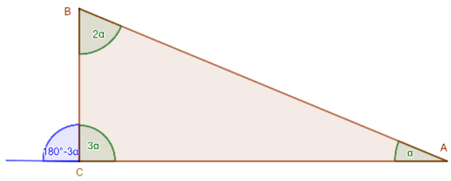
$$v=25$$

Tehát összesen 25 szál virágot vásároltunk.

B

4. Az ABC háromszögben az $ACB\sphericalangle$ háromszorosa a $BAC\sphericalangle$-nek, ez utóbbi fele az $ABC\sphericalangle$-nek. Mekkora az ABC háromszög legkisebb külső szöge?

A) 30° B) 40° C) 60° D) 90° E) 120°



Jelöljük az A csúcsnál lévő $BAC\sphericalangle$-et α-val! A feltételek szerint a C csúcsnál lévő $ACB\sphericalangle = 3\alpha$, és a B csúcsnál lévő $ABC\sphericalangle = 2\alpha$.

Felhasználva, hogy a háromszög belső szögeinek összege 180°:

$$\alpha + 2\alpha + 3\alpha = 180^\circ$$

$$6\alpha = 180^\circ$$

$$\alpha = 30^\circ$$

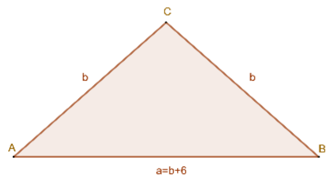
Így a háromszög belső szögei: 30°, 60°, 90°

Ismerve, hogy a legkisebb külső szög a legnagyobb belső szög mellett van (összegük 180°), így a keresett, legkisebb külső szög nagysága: $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

D

5. Egy egyenlő szárú háromszög kerülete $3,5$ -szer akkora, mint a szára. Az alapja 6 cm-rel hosszabb a szárnál. Hány cm a háromszög alapja?

A) 18 B) 24 C) 12 D) 10 E) 20



Jelöljük az alapot a-val, a szárakat b-vel, a kerületet k-val!

Az egyik feltétel szerint: $k = a + 2b = 3{,}5b$, amiből $a = 1{,}5b$

A másik feltétel szerint $a = b + 6$

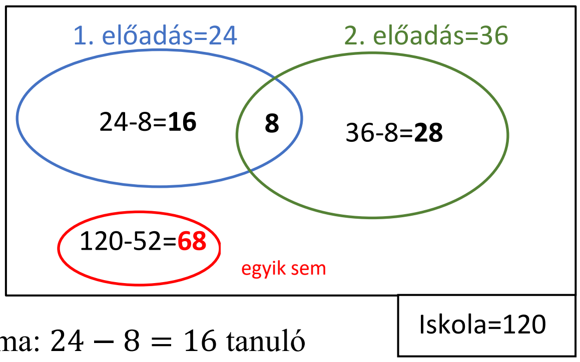
A kettőt összevetve: $b + 6 = 1{,}5b$, amiből $b = 12$, így $a = 1{,}5b = 1{,}5 \cdot 12 = 18$

Tehát a háromszög alapja 18 cm.

A

6. Egy iskolában a 120 fős 9. évfolyamnak két alkalommal szerveztek színházi előadást. A tanulók 20%-a az első, 30%-a pedig a második előadásra ment el. Mindkét előadáson 8 tanuló vett részt. Hány olyan tanuló volt, aki egyik előadásra sem ment el?

A) 50 B) 60 C) 68 D) 78 E) 58



Az iskolából az első előadáson résztvevők száma: $120 \cdot 0{,}2 = 24$ tanuló

Az iskolából a második előadáson résztvevők száma: $120 \cdot 0{,}3 = 36$ tanuló

Az iskolából mindkét előadáson résztvevők száma: 8 tanuló

Az iskolából csak az első előadáson résztvevők száma: $24 - 8 = 16$ tanuló

Az iskolából csak a második előadáson résztvevők száma: $36 - 8 = 28$ tanuló

Az iskolából legalább az egyik előadáson résztvevők száma: $16 + 8 + 28 = 52$ tanuló

Az iskolából egyik előadáson sem vettek részt: $120 - 52 = 68$ tanuló.

C

7. **Egy kertben eper palántákat szeretnének ültetni, ezért kijelölték a sorok helyét. Kiderült, hogy ha 10 palánta kerülne egy sorba, akkor ötnek nem jutna hely. Ezért 11 palántát ültettek egy sorba, de így egy hely üresen maradt. Hány palántát ültettek el összesen a kijelölt sorokba?**

A) 75 **B) 76** **C) 66** **D) 61** **E) 65**

Jelöljük s-sel a kijelölt sorok, p-vel az ültetendő palánták számát!

Ha 10 palántát ültetünk minden sorba, akkor 5 palánta kimarad, nekik nem lesz hely: $p = 10s + 5$

Ha 11 palántát ültetünk minden sorba, akkor 1 palántának lesz még hely: $p = 11s - 1$

A kettő egyenlőségéből (p a palánták száma): $p = 10s + 5 = 11s - 1$, amely egyenletből adódik, hogy $s = 6$

Az összes 6 sorba elültetett palánták száma: $p = 10 \cdot 6 + 5 = 11 \cdot 6 - 1 = 65$

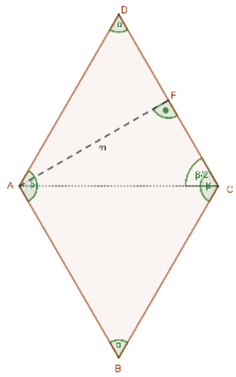
Tehát $p = 65$ palántát ültettek a kijelölt sorokba.

E

8. **Mekkora annak a rombusznak a hegyesszöge, amelynek a tompaszögéhez tartozó csúcsából húzott magassága felezi a szemközti oldalt?**

A) 30° **B) 40°** **C) 45°** **D) 50°** **E) 60°**

Ha egy háromszögben, jelen esetben az ACD háromszögben, a magasságvonal felezi az oldalt, akkor az a háromszög egyenlő szárú háromszög, így az ACD háromszög is egyenlő szárú: $AC = AD$



Mivel a rombusz minden oldala egyenlő, ezért $AD = CD$

A két egyenlőséget egybevetve: $AC = AD = CD$

Tehát az ACD háromszög szabályos, így minden szöge, a keresett α szög is 60°-os.

Természetesen a D csúccsal szemben lévő szög is $\alpha = 60^\circ$-os.

E

9. **A harmadik évezred kezdő éve a 2001 volt, amely évszámban a számjegyek összege 3. Hány ilyen tulajdonságú évszám van 1001-től 4000-ig?**

A) 8 **B) 9** **C) 10** **D) 11** **E) más érték**

A lehetséges évszámok: 1110; 1011; 1101; 1200; 1020; 1002; 2100; 2010; 2001; 3000

Tehát a feltételnek megfelelő évszám 10 db van.

C

10. Egy osztály futballcsapatának mezeit a szokásos módon 1-től 11-ig számozták. Az egyik mérkőzés után, a mosásnál kiderült, hogy hiányzik három darab mez. A meglévő mezeken található számok átlaga 7. Az alábbiak közül melyik lehetett a hiányzó három (mez)szám?

A) $1; 2; 7$ B) $2; 4; 7$ C) $3; 5; 6$ D) $1; 7; 8$ E) $3; 5; 9$

Ha a megmaradt 8 mezen lévő számok átlaga 7, akkor ezen számok összege: $8 \cdot 7 = 56$.

Mivel az összes mezen lévő számok összege $1 + 2 + \cdots + 10 + 11 = 66$, így a hányzó mezeken lévő számok összege $66 - 56 = 10$ lesz. Így a válaszok közül az a (mez)számhármas lesz a megoldás, amelyben a (mez)számok összege 10, vagyis az $1 + 2 + 7 = 10$, ami az A lehetőséget jelenti.

Megjegyzés: természetesen a feltételnek megfelelő más (mez)számhármas is lehetséges lenne (pl.: $2; 3; 5$ vagy $1; 4; 5$), de ezek nem szerepelnek a lehetőségek között. Külön összeszámlálási feladat lehet megkeresni az összes lehetőséget.

A

11. Az Adriai-tenger vizéből merített tengervíz sótartalma 3%. Hány liter édesvizet adjunk egy liter tengervízhez, hogy annak sótartalma 1%-ra csökkenjen?

A) 3 B) 2 C) 1 D) 0,5 E) 4

Jelöljük a hozzáadott édesvíz (0%-os) mennyiségét x-szel, és készítsünk az adatokról táblázatot!

	térfogat (l)	töménység (%)	oldott anyag (l)
eredeti tengervíz	1	3	$1 \cdot 0{,}03 = 0{,}03$
hozzáadott édesvíz	x	0	$x \cdot 0 = 0$
keverék, hígított tengervíz	$1 + x$	1	$(1 + x)0{,}01$

Az oldott anyagok összegére felírt egyenlet:

$$1 \cdot 0{,}03 + x \cdot 0 = (1 + x)0{,}01$$

$$0{,}03 = 0{,}01 + 0{,}01x$$

$$x = 2$$

Tehát 2 liter édesvizet kell adni egy liter 3 % sótartalmú tengervízhez, hogy annak sótartalma 1%-ra csökkenjen

B

12. A $(-2;-1)$, $(0;0)$, $(2;1)$ koordinátájú pontok rajta vannak az f függvény grafikonján. Az alábbiak közül melyik lehet az $f(x)$?

A) $f(x)=\frac{1}{x}$ B) $f(x)=0{,}25x^2$ C) $f(x)=\frac{1}{2}x$

D) $f(x)=3+2x$ E) $f(x)=2x$

A leggyorsabb megoldás az, ha észrevesszük, hogy a három pont koordinátáinak közös tulajdonsága az, hogy a második koordináta mindhárom esetben fele az első koordinátának. Ennek a hozzárendelési szabálynak a fentiek közül csak az $f(x)=\frac{1}{2}x$ függvény felel meg.

Megjegyzések:

- lassabban jutunk megoldáshoz, ha függvényenként behelyettesítjük az x helyére a pontok első koordinátáit, és megnézzük, hogy az utasítás a második koordinátát adja-e eredményül.

  Pl.: $-1=\frac{1}{2}\cdot(-2)=-1$; $0=\frac{1}{2}\cdot 0=0$; $1=\frac{1}{2}\cdot 2=1$

  Mindhárom esetben igaz állítást kaptunk, tehát az $f(x)=\frac{1}{2}x$ megfelel.

- természetesen más függvények is vannak az $f(x)=\frac{1}{2}x$ függvényen kívül, amelyek grafikonjain mindhárom pont rajta van, de ezek közül egy sem szerepelt a lehetőségek között.

C

13. Hányféle sorrendben lehet felfűzni 4 különböző kulcsot egy kulcskarikára? (Két sorrend azonos, ha a kulcsoknak ugyanazok a kulcsok a szomszédaik.)

A) 3 **B) 6** **C) 9** **D) 12** **E) 24**

a) Legegyszerűbb az esetek lerajzolásával megkeresni a helyes megoldást.

Helyettesíthetjük a kulcsokat színes karikákkal.

b) Úgy is összeszámolhatjuk, hogy pl. a piros kulccsal szembeni kulcsot váltogatjuk: a pirossal szemben háromféle szín lehetséges (zöld, sárga, kék). A maradék két kulcs egyértelmű, azok felcserélése nem ad új esetet

c) Ha formálisan gondolkodunk pl. nagyobb számú kulcs esetén:

4 szín összes lehetséges sorrendje $4!=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$.

Ha mindegyik kulcsot a körön egyszerre egy helyet jobbra (balra) visszük, nem változnak a szomszédok, így a feltétel miatt az esetek száma sem (négyszeresen számoltunk): $\frac{4!}{4}=\frac{24}{4}=6$.

Akkor sem változik az esetek száma, ha a kulcsok sorrendjét megfordítjuk, duplán számoltunk, ezért oszthatunk kettővel (ha $n\geq 3$).

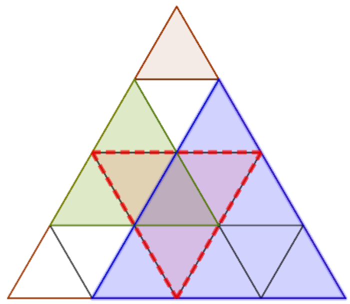
Tehát háromféle sorrendben lehet felfűzni 4 különböző kulcsot egy kulcskarikára.

A

14. Egy szabályos háromszög oldalait négy egyenlő részre osztjuk, és az osztópontokon keresztül az oldalakkal párhuzamosokat húzunk. Hány szabályos háromszöget tartalmaz így az eredeti háromszög?

A) 16 B) 17 C) 26 D) 27 E) 28

Az egyszerűség kedvéért az eredeti háromszöget 4 egység oldalúnak vegyük a négy egyenlő részre osztás miatt!



Az összeszámlálás soronként történik, és a felső csúcstól számlálva a sorokat, a következő oldalhosszúságú szabályos háromszögek keletkeznek:

4 egység oldalú (az eredeti háromszög): 1 db

3 egység oldalú (kék): $1 + 2 = 3$

2 egység oldalú (zöld): $1 + 2 + 3 = 6$, valamint $+1$, az oldalak felező pontjait összekötő háromszög (középháromszög, piros szaggatott), összesen tehát 7 db

1 egység oldalú (drapp): $1 + 3 + 5 + 7 = 16$

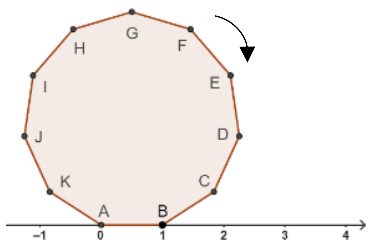
Így összesen $1 + 3 + 7 + 16 = 27$ szabályos háromszög keletkezik

D

15. Az x tengelyen jobbra (pozitív irányba) gördítjük a szabályos, egység oldalú tizenegyszöget (az A csúcs az 59595-ös számra az I betű kerül. kezdetben a 0-n van). Melyik betűvel jelölt csúcs kerül az 59595-ös számra?

A) E B) F C) G D) H E) I

Az első körülfordulás során a 11 egységnyi kerület teljes egészében érintkezik az x tengellyel (csúszás nélkül gördül), így az A csúcs a 11-esre kerül. majd periódikusan (11-esével) a 22-esre, a 33-asra, …. Az $59595 = 11 \cdot 5417 + 8$, így 5417 teljes fordulat után még 8 egység kell, ami az A csúcs utáni 8. betűt, az I betűt jelenti.



Tehát az 59595-ös számra az I betű kerül.

E

16. Három szabályos dobókockával egyszerre dobtunk. A dobott számok összege 8. Mennyi lesz a dobott számok szorzatának legnagyobb értéke?

A) 6 B) 8 C) 12 D) 18 E) 36

A dobott számok összege 8 a következő módon lehet:

$$8 = 1 + 1 + 6 = 1 + 2 + 5 = 1 + 3 + 4 = 2 + 2 + 4 = 2 + 3 + 3$$

Ezen összegek tagjainak (dobott pontok) szorzata:

$$1 \cdot 1 \cdot 6 = 6; \quad 1 \cdot 2 \cdot 5 = 10; \quad 1 \cdot 3 \cdot 4 = 12; \quad 2 \cdot 2 \cdot 4 = 16; \quad 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$$

Ezek közül a legnagyobb szorzat természetese a 18.

D

17. Egy háromjegyű számot kétszer egymás után leírunk. Melyik állítás nem igaz minden esetben az így keletkező, H-val jelölt hatjegyű számra?

A) $77|H$ B) $91|H$ C) $33|H$ D) $143|H$ E) $1001|H$

Legyen a háromjegyű számunk helyiértékes jelöléssel: $\overline{xyz}$

Ha ezt egymás után kétszer leírjuk, kapjuk a hatjegyű számot: $\overline{xyzxyz}$

Ha ezt a hatjegyű számot alaki értékes formában felírjuk, kapjuk:

$$\overline{xyzxyz} = 100000x + 10000y + 1000z + 100x + 10y + z = 100100x + 10010y + 1001z$$

Ebből az összegből kiemelhetjük az 1001-et, kapjuk szorzat alakban:

$$100100x + 10010y + 1001z = 1001(100x + 10y + z)$$

Felhasználva azt, hogy $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$

$$1001(100x + 10y + z) = 7 \cdot 11 \cdot 13(100x + 10y + z) = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \overline{xyz}$$

Ennek a hatjegyű számnak a prímtényzőket figyelembe véve a $77 = 7 \cdot 11$; a $91 = 7 \cdot 13$; a $143 = 11 \cdot 13$ és az 1001= $7 \cdot 11 \cdot 13$ minden esetben osztója.

A 33 viszont csak akkor, és csakis akkor lesz osztója, ha az $\overline{xyz}$ osztható 3-mal (vagy az oszthatósági szabály miatt $x + y + z$ osztható 3-mal), mert akkor a prímtényzők között megjelenik a 3, és így a $33 = 3 \cdot 11$ már osztója lesz a hatjegyű számnak.

Vagyis a 33 csak bizonyos feltétellel (ha $3|\overline{xyz}$) lesz osztója a H-nak, a többi szám minden esetben.

C

18. Hány olyan négyzetszám van, amelynek minden számjegye 5?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) végtelen sok

Ha lenne olyan négyzetszám (egy pozitív egész szám négyzete) amelynek minden számjegye 5 lenne, akkor ezt a számot kéttényezős szorzat alakra lehetne hozni, amelynek egyik tényzője 5, a másik pedig olyan szám, ami csupa 1-esekből áll:

$$55 \ldots 55 = 5 \cdot (11 \ldots 11)$$

Ha a négyzetszámunk osztható 5-tel, akkor oszthatónak kell lenni $5^2 = 25$-tel is. Ez viszont csak akkor teljesülhet, ha a második tényező osztható 5-tel. De ez nem lehet, mert az 1-re végződő számok nem oszthatók 5-tel.

Tehát nincs olyan négyzetszám (0 db), amelynek minden számjegye 5.

A

19. ***Mókusfalva* iskolájának minden tanulója részt vett egy sportversenyen. A résztvevő csapatok mindegyikében három fiú és öt lány volt. Az iskolába 42-vel több lány jár, mint fiú. Tudva, hogy egy tanuló csak egy csapatnak lehetett tagja, hány csapat vett részt a versenyen?**

A) 20 B) 21 C) 22 D) 23 E) 24

Mivel minden csapatban $5-3=2$-vel több lány van, így ahhoz, hogy teljesüljön az a feltétel, hogy az iskolában 42-vel több lány jár, 22 csapat ($22 \cdot 2 = 42$) szükséges.

Megoldható a feladat másképpen is.

Jelöljük a csapatok számát n-nel, ekkor a fiúk és a lányok számának különbsége:

$$5n - 3n = 42$$

$$2n = 42$$

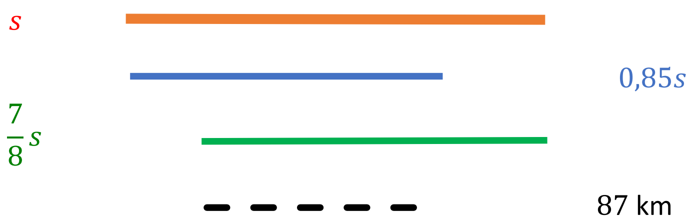
$$n = 21$$

B

20. **Két autó egyidőben indult el egymással szemben, egyik városból a másik városba. A találkozásuk után (mindegyik a régi sebességével folytatta az útját), amikor az egyik már megtette tervezett útjának a 85%-át, a másik pediga $\frac{7}{8}$-át, a távolság 87 km volt köztük. Milyen messze van egymástól a két város?**

A) 75 km B) 87 km C) 102 km D) 120 km E) 126 km

Jelöljük a két város távolságát s-sel!
Ha összeadjuk azokat az utakat, amelyeket a feladat említ, a találkozás utáni 87 km-t kétszer adtuk össze, így azt egyszer ki kell vonni, hogy a két város távolságát megkapjuk (logikai szita):



$$0{,}85s + \frac{7}{8}s - 87 = s$$

$$\frac{7}{8}s - 0{,}15s = 87$$

$$7s - 1{,}2s = 696$$

$$5{,}8s = 696$$

$$s = 120 \text{ (km)}$$

Tehát a két város távolsága 120 km.

D

21. A $2^{2022} + 2^{2023} + 2^{2024}$ összeg melyik számmal nem osztható az alábbiak közül?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 7 E) 8

Alakítsuk szorzattá az összeget a 2^{2022} kiemelésével!

$$2^{2022} + 2^{2023} + 2^{2024} = 2^{2022}(1 + 2^1 + 2^2) = 7 \cdot 2^{2022}$$

A szorzatból látszik, hogy az eredeti összeg osztható 7-tel, 2-vel, $2^2 = 4$-gyel, $2^3 = 8$-cal, de 3-mal nem osztható, mert 2 bármely hatványa nem osztható 3-mal.
Tehát a fenti összeg 3-mal nem osztható a megadott lehetőségek közül.

Megjegyzés: természetesen más számokkal, pl. 9-cel sem osztható az összeg, de azok nem szerepeltek a megadott lehetőségek között

B

22. Egy verseny végeredményéről Anna, Bea, Cili és Dóra így számolt be:

- **Anna: Bea lett a győztes**
- **Bea: Cili nyert**
- **Cili: nem én nyertem**
- **Dóra: nem én győztem**

Tudjuk, hogy csak egyikük mondott igazat, hárman hamisat állítottak. Ki lett a győztes ezen a versenyen?

A) Anna B) Bea C) Cili D) Dóra E) más válasz

Vizsgáljuk az eseteket aszerint, hogy ki mondott igazat. Készítsünk táblázatokat!

	Igaz	Hamis	Kik lehetnek a győztesek?
Anna	Bea lett a gyöztes		Bea
Bea		Cili nyert	Anna, Bea, Dóra
Cili		nem én nyertem	Cili
Dóra		nem én győztem	Dóra

Nincs közös része a lehetséges győzteseknek, ellentmondás, tehát Anna nem mondhatott igazat.

	Igaz	Hamis	Kik lehetnek a győztesek?
Anna		Bea lett a gyöztes	Anna, Cili, Dóra
Bea	Cili nyert		Cili
Cili		nem én nyertem	Cili
Dóra		nem én győztem	Dóra

Nincs közös része a lehetséges győzteseknek, ellentmondás, tehát Bea nem mondhatott igazat.

	Igaz	Hamis	Kik lehetnek a győztesek?
Anna		Bea lett a gyöztes	Anna, Cili, Dóra
Bea		Cili nyert	Anna, Bea, Dóra
Cili		nem én nyertem	Cili
Dóra	nem én győztem		Anna, Bea, Cili

Nincs közös része a lehetséges győzteseknek, ellentmondás, tehát Dóra nem mondhatott igazat.

	Igaz	Hamis	Kik lehetnek a győztesek?
Anna		Bea lett a gyöztes	Anna, Cili, Dóra
Bea		Cili nyert	Anna, Bea, Dóra
Cili	nem én nyertem		Anna, Bea, Dóra
Dóra		nem én győztem	Dóra

Egyetlen közös része van a lehetséges győzteseknek, mégpedig Dóra, nincs ellentmondás az állítások között, vagyis Cili mondott igazat, és a verseny győztese Dóra lett.

D

Megjegyzés: természetesen táblázat nélkül is meg lehet oldani a feladatot, de érdemes táblázatot készíteni, egy kicsivel többet írni, mert a szemléltetés segít a megoldásban.

Nézzünk egy frappáns, ötletes, rendkívül elegáns megoldást!

A „C” és „D” állítások nem lehetnek egyszerre hamisak, mert akkor ellentmondást kapunk („Cili nyert” és „Dóra nyert”), tehát e kettő közül az egyik igaz.

Ugyanezen okból a „B” és „C” állítások sem lehetnek egyszerre hamisak („Cili nyert” és „nem Cili nyert”), tehát e kettő közül is igaz az egyik.

Mivel pontosan egy állítás igaz, az a „C”, így a „D” (Dóra: „nem én győztem”) biztosan hamis, ami alapján Dóra a győztes.

23. Egy dobozban piros, zöld, kék és sárga golyók vannak. Legalább 8 golyót kell kihúzni a dobozból, hogy biztosan legyen a kihúzottak között piros. Legalább 9-et kell kihúzni ahhoz, hogy biztosan legyen zöld, legalább 10-et ahhoz, hogy biztosan legyen kék, és legalább 10-et ahhoz, hogy biztosan legyen sárga a kihúzottak között. Hány sárga golyó van a dobozban?

A) 2 **B) 3** **C) 4** **D) 5** **E) 10**

Ha legalább 8 golyót kell kihúzni a dobozból, hogy biztosan legyen a kihúzottak között piros, akkor a nem pirosak száma 7, formalizmussal: $z + k + s = 7$

Ha legalább 9 golyót kell kihúzni a dobozból, hogy biztosan legyen a kihúzottak között zöld, akkor a nem zöldek száma 8, formalizmussal: $p + k + s = 8$

Ha legalább 10 golyót kell kihúzni a dobozból, hogy biztosan legyen a kihúzottak között kék, akkor a nem kékek száma 9, formalizmussal: $p + z + s = 9$

Ha legalább 10 golyót kell kihúzni a dobozból, hogy biztosan legyen a kihúzottak között sárga, akkor a nem sárgák száma 9, formalizmussal: $p + z + k = 9$

Ha ezeket az eredményeket (egyenleteket) összeadjuk, és észrevesszük, hogy minden szín háromszor szerepel, akkor kapjuk:

$$3(p + z + k + s) = 33$$

$$p + z + k + s = 11$$

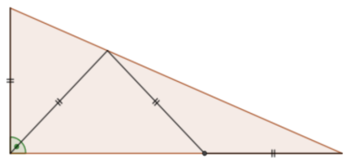
vagyis a golyók száma összesen 11.

A negyedik eredményünkből tudjuk, hogy a nem sárgák száma 9, így a sárga golyók száma: $11 - 9 = 2$

A

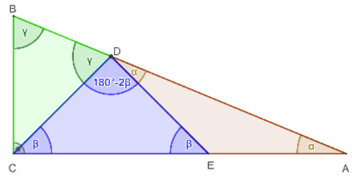
Megjegyzés: a sárgához ($s = 2$) hasonló módszerrel ki lehet számítani, hogy $p = 4$, $z = 3$ és $k = 2$, amit szemléltetünk. Ezen lehet ellenőrizni a skatulya-elv helyességét.

24. Mekkora a derékszögű háromszög legkisebb szöge, ha a háromszöget az ábrán látható módon három db egyenlő szárú háromszögre tudjuk felbontani?



A) 30° B) 45° C) 25° D) $22,5^\circ$ E) $67,5^\circ$

Egészítsük ki az eredeti ábránkat csúcsok, pontok, szögek betűzésével!



Jelöljük az egyenlő szárú háromszögek alapon fekvő szögeit rendre α-val, β-val, illetve γ-val!

A feltétel alapján $(AE = ED = DC = CB)$ a színes háromszögek egyenlő szárú háromszögek, így az alapon fekvő szögeik egyenlőek.

A középső (kék) háromszögnek az átfogó D pontjánál lévő szárszöge $180^\circ - 2\beta$. Azt is tudjuk, hogy az $ADB\sphericalangle = 180^\circ$, így $\alpha + 180^\circ - 2\beta + \gamma = 180^\circ$. Ebből következik, hogy $\alpha + \gamma = 2\beta$. Tudjuk, hogy a derékszögű háromszög hegyesszögeinek összege $\alpha + \gamma = 90^\circ$, így $90^\circ = 2\beta$, amiből $\beta = 45^\circ$ következik. Kihasználva a külső- és belső szögek közötti, jelen esetben $2\alpha = \beta$ kapcsolatot, kapjuk, hogy $\alpha = 22{,}5^\circ$, amiből a másik hegyesszögre a $\gamma = 67{,}5^\circ$-os érték adódik.

Mivel a derékszögű háromszögnek pontosan két hegyesszöge van, így ezek közül a legkisebb az $\alpha = 22{,}5^\circ$

D

25. Hány olyan k pozitív egész szám van, amelyre az $\frac{1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot 4!}{k}$ négyzetszám lesz ($n!$ jelenti 1-től n-ig a pozitív egész számok szorzatát)?

A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

Jelöljük a négyzetszámot N-nel!

Keressük tehát a $\frac{1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot 4!}{k} = N$ egyenletnek a feltételeknek megfelelő megoldásait. Ez az egyenlet egyenértékű (ekvivalens) a $\frac{1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot 4!}{N} = k$ egyenlettel.

Kiszámolva a bal oldal számlálóját, kapjuk: $\frac{288}{N} = k$

Érdemes táblázatba foglalni a 288 négyzetszám lehetséges osztóit. Ehhez vizsgáljuk meg az összes négyzetszámot a $0 < N \leq 288$ intervallumban!

N	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169
$k = \frac{288}{N}$	288	72	32	18	$\notin Z$	8	$\notin Z$	$\notin Z$	$\notin Z$	$\notin Z$	$\notin Z$	2	$\notin Z$

A táblázat alapján láthatjuk, hogy a feltételnek megfelelő k számból 6 db van.

D

A feladatsort és a megoldásokat összeállították, szerkesztették és lektorálták:

Hegyesi János, Herczeg Viktória, Juhászné Kunstár Mária, Marczis György, dr. Molnár István, Molnár Judit, Pálinkás István, dr. Rókáné Rózsa Anikó, Szabó Zsófia, Tóth István