XXVII. Hajnal Imre Matematika Tesztverseny, 2023

II. kategória

Megoldások

(Kosztolányi József)

1. Ha $\frac{6}{x}=\frac{1}{3}$, akkor $x=$

(A) 18 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{18}$ (D) 2 (E) 9

Megoldás: Az egyenletet 3*x*-szel beszorozva kapjuk, hogy $x=18$.

2. Öt szám átlaga 4. Az öt szám közül négy: 1; 2; 3; 4. Melyik az ötödik szám?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

Megoldás: Mivel a számok összege $4\cdot 5=20$ és $1+2+3+4=10$, ezért az ötödik szám a 10.

3. Melyik az a szám, amelynek 87,5%-a egyenlő 63-mal?

(A) 45 (B) 70 (C) 72 (D) 74 (E) 75

Megoldás: Ha *x* a keresett szám akkor a feltétel szerint $0{,}875\cdot x=63$, ahonnan $x=72$.

4. Egy téglalap területe 72 cm^2. Tudjuk, hogy egyik oldala kétszer olyan hosszú, mint egy másik oldal. Hány centiméter a téglalap kerülete?

(A) 34 (B) 36 (C) 42 (D) 48 (E) 54

Megoldás: Ha *x* cm a téglalap rövidebb oldala, akkor $2x^2=72$, ahonnan $x=6$. A téglalap kerülete $2\cdot(2x+x)=36$ cm.

5. Dani egy olyan utca páros oldalán lakik, ahol mindkét oldalon nyolc ház van. A páros oldalon a házszámok az utca elejétől a végéig rendre 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16. Dani észrevette, hogy az ő házuktól balra levő házszámok összege ugyanannyi, mint a jobbra levő házszámok összege. Melyik Daniék házszáma?

(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12 (E) 14

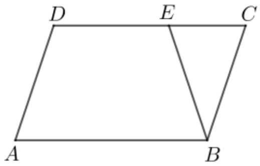
Megoldás: Könnyű kalkulációval adódik, hogy Daniék házszáma a 12, ugyanis balra is, jobbra is 30 a házszámok összege.

6. Ha $\frac{a}{a-2b}=3$, akkor $\frac{a}{b}=$

(A) 3 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) 2 (E) –3

Megoldás: A feltételi egyenlet bal oldalának számlálóját és nevezőjét *b*-vel osztva kapjuk az $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}-2}=3$ egyenletet, ahonnan $\frac{a}{b}=3$.

7. Az ábrán látható *ABCD* paralelogramma *CD* oldalának *E* pontjára teljesül, hogy $\frac{DE}{EC}=\frac{3}{2}$. Mennyi az *ABED* négyszög és az *ABCD* paralelogramma területének aránya?



(A) 1 : 2 (B) 2 : 3 (C) 3 : 4 (D) 4 : 5 (E) 5 : 6

Megoldás: Legyen $AB=CD=a$ és a paralelogramma megfelelő magassága *m*. Ezzel $T_{ABCD}=a\cdot m$ és $T_{ABED}=\frac{a+\frac{3}{5}a}{2}\cdot m=\frac{4}{5}\cdot a\cdot m$. A két terület aránya tehát 4 : 5.

8. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amellyel a 2023-at megszorozva négyzetszámot (egy pozitív egész szám négyzetét) kapunk?

(A) 3 (B) 7 (C) 17 (D) 19 (E) 23

Megoldás: Mivel $2023=7\cdot 17^2$, ezért a legkisebb megfelelő pozitív egész a 7.

9. Egy pozitív racionális számból kivonva a reciprokát $\frac{9}{20}$-ot kapunk. Mennyi a szám és reciprokának összege?

(A) $\frac{41}{40}$ (B) $\frac{20}{9}$ (C) $\frac{25}{16}$ (D) $\frac{41}{20}$ (E) 5

Megoldás: Ha *x* jelöli a keresett pozitív racionális számot, akkor a feltétel szerint

$$x-\frac{1}{x}=\frac{9}{20}.$$

ennek a másodfokú egyenletnek a pozitív gyöke $\frac{5}{4}$, így a kérdéses összeg $\frac{5}{4}+\frac{4}{5}=\frac{41}{20}$.

10. Hány olyan 3-mal osztható háromjegyű pozitív egész szám van, amelynek minden számjegye páratlan?

(A) 29 (B) 36 (C) 39 (D) 40 (E) 41

Megoldás: A számjegyek lehetnek 1, 3, 5, 7, 9, és a három számjegy összege osztható kell legyen 3-mal.

1. 5 olyan szám van, melyek számjegyei azonosak: 111, 333, 555, 777, 999. Ezek mindegyike osztható 3-mal.
2. A kétféle számjegyből álló megfelelő háromjegyű számok számjegyei lehetnek: 1, 1, 7; 3, 3, 9; 7, 7, 1; 9, 9, 3. Mind a négy esetben 3 megfelelő háromjegyű szám van, így az ilyen típusú háromjegyű számok száma 12.
3. A háromféle számjegyből álló megfelelő háromjegyű számok számjegyei lehetnek: 1, 3, 5; 1, 5, 9; 3, 5, 7; 5, 7, 9. Mind a négy esetben 6 megfelelő háromjegyű szám van, így az ilyen típusú háromjegyű számok száma 24.

Összesen tehát $5+12+24=41$ alkalmas háromjegyű szám van.

11. Hány négyzetcentiméter a felszíne annak a kockának, amelynek a térfogata 64 cm^3?

(A) 48 (B) 96 (C) 144 (D) 192 (E) 384

Megoldás: A feltétel alapján a kocka éle 4 cm hosszú. Így a felszíne $6 \cdot 4^2 = 96$ cm^2.

12. Két szabályos dobókocka mindegyikének lapjaira rendre az 1, 1, 2, 3, 5, 8 számokat írjuk (Fibonacci-kockák). Mennyi annak a valószínűsége, hogy a két kockát egyszerre feldobva különböző számokat dobunk?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{5}{9}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{5}{6}$ (E) $\frac{7}{9}$

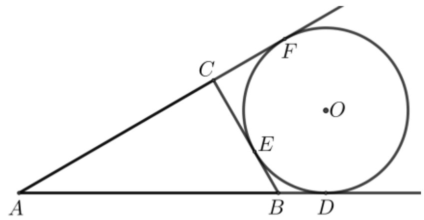
Megoldás: Mindkét kocka egyenlő valószínűséggel esik bármelyik lapjára, ezért az összes esetek száma $6^2 = 36$. Ebből a 36 esetből 4 olyan van, amikor mindkét kocka ugyanarra a 2, 3, 5 vagy 8 számot tartalmazó lapjára esik, és 4 olyan eset van, amikor mindkét kockával 1-et dobunk. Így a kedvező esetek száma $36-8=28$, a kérdéses valószínűség pedig $\frac{28}{36}=\frac{7}{9}$.

13. Ha a q szám p%-a k, akkor a p szám q%-a

(A) $\frac{k}{100}$ (B) $\frac{pq}{200}$ (C) $\frac{pk}{100}$ (D) $\frac{qk}{100}$ (E) k

Megoldás: A q szám p%-a ugyanannyi, mint a p szám q%-a, nevezetesen $\frac{pq}{100}$.

14. Az ABC háromszögben $AB=10$, $BC=5$, $ABC\sphericalangle = 60°$. A háromszög BC oldalához írható, O középpontú kört az AB egyenes D-ben, a BC egyenes E-ben, a CA egyenes pedig F-ben érinti. Mekkora a kör sugara?



(A) $\frac{5\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ (B) $\frac{5\left(3-\sqrt{3}\right)}{2}$ (C) $\frac{5}{1+\sqrt{3}}$ (D) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ (E) $\frac{25\sqrt{3}}{6}$

Megoldás: Az adatok alapján az ABC háromszög egy szabályos háromszög fele, ezért $BCA\sphericalangle = 90°$ és $AC = 5\sqrt{3}$. Mivel a kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra, és a külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak, ezért a $CEOF$ négyszög négyzet. Ez pedig azt jelenti, hogy a keresett sugár éppen a $CE = CF$ érintőszakaszok hosszával egyezik meg. Az érintőszakaszok egyenlőségét és az eddigieket többször felhasználva kapjuk a következőt: $AF = AD = \frac{AB+BC+CA}{2} = 5\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{2}$. Mivel $CF = AF - CA$, ezért a keresett sugár: $5\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{2} - 5\sqrt{3} = 5\cdot\frac{3-\sqrt{3}}{2}$.

15. Az $\left(x^2-x\right)^2=18\left(x^2-x\right)-72$ egyenlet pozitív gyökeinek összege

(A) 5 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 18

Megoldás: Az egyenlet másodfokú az $y=x^2-x$ kifejezésre. Az új ismeretlen behelyettesítése után kapott $y^2-18y+72=0$ egyenlet megoldásai: $y_1=6$, $y_2=12$.

1. $x^2-x-6=0 \rightarrow x_1=-2$, $x_2=3$

2. $x^2-x-12=0 \rightarrow x_3=-3$, $x_4=4$

A pozitív gyökök összege 7.

16. Hány olyan kétjegyű pozitív egész szám van, amely két különböző prímszám szorzata?

(A) 14 (B) 27 (C) 37 (D) 31 (E) 29

Megoldás: A kisebb prímtényező szerint számoljuk össze a lehetőségeket.

1. 2 a kisebb tényező. Ekkor a másik tényező lehet 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47. Így 13 darab megfelelő számot kapunk.
2. 3 a kisebb tényező. Ekkor a nagyobb tényező legfeljebb 31 lehet, vagyis 9 darab számot kapunk.
3. 5 a kisebb tényező. Ekkor legfeljebb 19 a nagyobb tényező. 5 darab számot kapunk így.
4. 7 a kisebb tényező. Ekkor a nagyobb tényező csak a 11 és a 13 lehet, ezért 2 darab megfelelő számot kapunk.

Mivel $11\cdot 13>100$, ezért megkaptuk az összes megfelelő számot, amelyek száma 29.

17. Ha $\dfrac{3a+4b}{2a-2b}=5$, akkor $\dfrac{a^2+2b^2}{ab}=$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Megoldás: A feltételből átalakítások után kapjuk, hogy $a=2b$. Ezt a kérdéses törtbe helyettesítve rövid számolás után adódik az eredmény.

18. Egy dobozban 9 darab tapintásra egyforma golyó van, 6 piros és 3 zöld. Véletlenszerűen kiveszünk a dobozból 2 golyót. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kivett golyók azonos színűek?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{5}{12}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{3}{4}$ (E) $\frac{2}{9}$

Megoldás: Két golyót $\binom{9}{2}=36$-féleképpen vehetünk ki a dobozból. Ez az összes esetek száma. A 6 piros golyóból 2-t $\binom{6}{2}=15$-féleképpen, a 3 zöld golyóból 2-t 3-féleképpen vehetünk. Mivel ezek egymást kizáró lehetőségek, ezért a kedvező esetek száma $15+3=18$. A keresett valószínűség tehát $\frac{1}{2}$.

19. Egy 30 fős osztály tanulói a félév során két témazáró dolgozatot írtak matematikából. Az első dolgozatot 17 tanuló írta jelesre, a másodikat 18 tanuló. Legalább hány tanulónak lett mindkét dolgozata jelesre értékelve, ha mindkét dolgozatot megírta az osztály minden tagja?

(A) 1 (B) 5 (C) 13 (D) 15 (E) 17

Megoldás: Mivel az osztálylétszám 30, és $17+18=35$, ezért legalább 5 tanulót kétszer számoltunk, és ők mindkét dolgozatukat jelesre írták.

20. Hány olyan pozitív egész értéke van a p paraméternek, amelyre a $\sqrt{p+x}+\sqrt{p-x}=p$ egyenletnek van valós gyöke?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Megoldás: Mivel az egyenlet bal oldala nem negatív, ezért $0<p$ a feltételt is figyelembe véve. Keressünk felső korlátot p-re. Alakítsuk az egyenletet, majd emeljünk kétszer négyzetre.

$$\sqrt{p+x}=p-\sqrt{p-x}$$

$$2p\sqrt{p-x}=p^2-2x$$

$$4x^2=p^3(4-p)$$

Mivel ennek az utolsó egyenletnek a bal oldala nem negatív, ezért $p\le 4$. Így p lehetséges értékei: 1, 2, 3, 4. Némi számolással látható, hogy $p=1$ esetén nincs megoldás, ugyanis $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}>1$. A p másik három lehetséges értéke esetén viszont van az egyenletnek valós megoldása.

21. Az ábrán látható, hiányosan kitöltött bűvös négyzet minden sorában, oszlopában és átlójában ugyanannyi a számok összege. Ekkor $x+y=$

16		y
	x	10
8		12

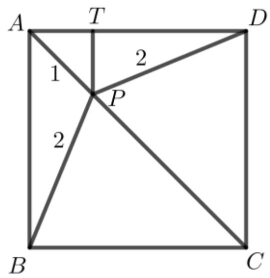
(A) 34 (B) 35 (C) 36 (D) 37 (E) 38

Megoldás: Mivel $8+x+y=16+x+12$, ezért $y=20$. Így a bűvös négyzet állandó összege 42 a jobb oldali oszlop alapján, és valamelyik átlóösszegből kapjuk, hogy $x=14$.

22. Az $ABCD$ négyzet P belső pontjára teljesül, hogy $PA=1$, $PB=2$ és az ABP háromszög egybevágó az APD háromszöggel. Mekkora az $ABCD$ négyzet területe?

(A) $\frac{1+\sqrt{7}}{2}$ (B) 4 (C) $4-\sqrt{7}$ (D) $4+\sqrt{7}$ (E) 5

Megoldás: A feltételeknek megfelelő ábra, ahol T a P-ből AD-re állított merőleges talppontja:



A feltételek alapján az APT háromszög egyenlő szárú és derékszögű, ezért $AT = TP = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. A DTP háromszög derékszögű háromszög, ezért alkalmazható rá Pitagorasz tétele:

$$TD^2 = PD^2 - TP^2 = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2},$$

ahonnan $TD = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$. Így a négyzet területe:

$$AD^2 = (AT + TD)^2 = \left(\frac{1+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{8+2\sqrt{7}}{2} = 4 + \sqrt{7}.$$

23. Tudjuk, hogy $(1!)\cdot(2!)\cdot(3!)\cdot(4!)\cdot(5!)\cdot(6!)\cdot(7!)\cdot(8!)\cdot(9!)\cdot(10!)\cdot(11!)\cdot(12!) = (m!)\cdot n^2$. ($k!$ jelöli az első *k* darab pozitív egész szám szorzatát.) Ekkor $m =$

(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10 (E) 12

Megoldás: Minden páros *k*-ra alkalmazzuk a $k! = (k-1)!\cdot k$ azonosságot. Ezzel

$$(1!)\cdot(2!)\cdot(3!)\cdot(4!)\cdot(5!)\cdot(6!)\cdot(7!)\cdot(8!)\cdot(9!)\cdot(10!)\cdot(11!)\cdot(12!) = \left((1!)\cdot(3!)\cdot\ldots\cdot(11!)\right)^2\cdot 2^6\cdot(6!) =$$

$= (6!)\cdot\left((1!)\cdot(3!)\cdot\ldots\cdot(11!)\cdot 2^3\right)^2$, vagyis $m = 6$.

24. Ha $(1+3+5+\ldots+p)+(1+3+5+\ldots+q) = (1+3+5+\ldots+25)$, akkor $p+q=$

(A) 13 (B) 25 (C) 26 (D) 32 (E) 50

Megoldás: A feltételi egyenletben a zárójeleken belüli összegeket zárt alakra hozva

$$\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{q+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{26}{2}\right)^2 = 13^2.$$

Mivel $\frac{p+1}{2}$ és $\frac{q+1}{2}$ pozitív egészek, ezért az egyik 5, a másik 12. A kérdés szempontjából mindegy, hogy melyik 5 és melyik 12, így $p+q = 9+23 = 32$.

25. Hány olyan nem üres részhalmaza van az $A = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\}$ halmaznak, amelyben nincsenek szomszédos egész számok?

(A) 16 (B) 18 (C) 20 (D) 21 (E) 24

Megoldás: A keresett részhalmazok legfeljebb háromeleműek lehetnek, ugyanis négy elem esetén már biztosan van két szomszédos.

Az összes egyelemű részhalmaz megfelel, számuk 6.

Megfelelő kételemű részhalmaz 10 darab van: 4 darab olyan, amelyiknek kisebb eleme az 1, 3 darab olyan, amelyiknek kisebb eleme a 2, 2 darab olyan, amelyiknek kisebb eleme a 3 és 1 darab olyan, amelyiknek kisebb eleme a 4.

A megfelelő háromelemű részhalmazok: $\{1;\ 3;\ 5\}$, $\{1;\ 3;\ 6\}$, $\{1;\ 4;\ 6\}$, $\{2;\ 4;\ 6\}$, összesen 4 darab.

A feltételnek megfelelő részhalmazok száma $6+10+4=20$.